

5
61



ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES,

LOS SEIS PRIMEROS LIBROS DE LOS PLANOS; Y LOS ONZENO, Y DOZENO DE LOS SOLIDOS:

CON ALGVNOS SELECTOS THEOREMAS DE ARCHIMEDES.

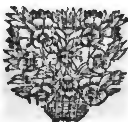
TRADVCIDOS, Y EXPLICADOS POR EL

P. JACOBO KRESA

DE LA COMPAÑIA DE JESVS,

Cathedratico de Mathematicas en los Estudios Reales del Colegio Imperial de Madrid; y en interin en la Armada Real en Cadiz.





EN BRVSSELAS

Por Francisco Foppens, año de 1689.

[illegible]

AL EXMO. SEÑOR

DON IGNACIO DE LA CRVZ

MANRIQVE DE LARA REMIREZ DE Arellano Mendoza y Alvarado, Conde de Aguilar, Señor de los Cameros, Marquès de la Hinojosa, Conde de Villamor, Señor del Estado de Andaluz, y Mayalde, y de la Casa Carrillo, y de la Villa de Arellano en el Reyno de Navarra; Capitan de vna Compañia de las Guardias Viejas de Castilla, y de otra de Infanteria Española de la Armada del Mar Oceano, &c.

HIJO VNICO, PRIMOGENITO, Y HEREDERO DEL

EXCELENTISSIMO SEñOR D. RODRIGO MANVEL Manrique de Lara, Conde de Frixiliana, Cavallero del Orden de Calatrava, Alcayde perpetuo de los Reales Castillos de la Alcazaba, Gibralfaro, Torreon del Obispo, y Fuerte de Genoveses de la Ciudad de Malaga; Gentil-hombre de la Camara de su Magestad, Capitan General de la Armada, y Exercito del Mar Oceano; y al mismo tiempo Capitan General de dicho Mar Oceano, y de las Costas, y Exercitos de Andaluzia, &c.

Excelentissimo señor.

ES tan comun, y vulgar el error del juizio en los hombres deste siglo, que temiendo su censura se vèn muchos obligados à sepultar en el silencio, lo que avian de dar a la luz publica, ò à escudarse de algun Principe, que sirva de asylo contra los Zoylos. Por esso quando determ-

termine traducir, para beneficio publico, y vtilidad de la Nacion Española, de la lengua latina en la Castellana estos Elementos, no presumi immunidades deste riesgo, antes apetecì como lauro de mi trabajo ser enseñado de todos; con calidad, que primero aya de leer atentamente todo este libro, el que para su censura quisiere graduarse de Maestro. Notorio es, que V. E. ha favorecido este pequeño trabajo, no solo leyendo gustoso todo el libro, sino penetrando aficionado el alma de cada vna de sus proposiciones; y quando mi estimacion no reconociera otras muchas obligaciones que dexo al silencio, por esta sola hiziera manifiesto agravio à mi reconocido afecto en no solicitar, que la primera censura fuesse la de V. E. cuya natural inclinacion, juntamente con la paternal solicitud del Excelentissimo señor Conde de Aguilar, y Frixiliana su padre, de adornar sus generosas prendas con el esmalte de todas buenas letras, le aficionaron tan desde su tierna edad à las Mathematicas, que quando parece avia de cursar los primeros principios, ya podia dar lecciones de Maestro. Pues aun no tenia V. E. los quinze años cumplidos, quando ya de la Geometria avia estudiado los Elementos, ya de la Geographia avia sondado los golfos, ya de la Astronomia avia passeado los estrellados cursos, ya de la militar Architectura avia penetrado las fortificaciones; ya de la facultad nautica, assi en la fabrica de Nauios, como en las sendas de sus rumbos avia logrado entre los mas peritos el Magisterio; ya de la Algebra avia penetrado los secretos: y no tanto para la particular, quanto para la comun vtilidad; ni tampoco para la vana ostentacion de sus estudios, quanto para la imitacion, y exemplo de otros muchos de su Nacion, defendiò, y sustentò el primero en la lengua Latina Conclusiones publicas, dedicadas a nuestro Catolico Monarca Carlos II. que Dios guarde, por todo vn dia entero contra diez y ocho antagonistas en el Colegio de la Compañia de Jesus de Cadiz, con tanta satisfacion, y admiracion del docto, y numeroso concurso, que assistiò a la literaria palestra; pocas vezes hasta entonces vista, de que en quinze años (fuera de los otros muchos exercicios, que sirven de esmalte a la Grandeza) se hallassen tan crecidos progressos de estudios, que prorrumpiò en vniversales aclamaciones de aplauso. Pero què mucho admirassen

rassen

rassen los naturales sus aciertos, quando volò la fama de sus discursos hasta los Reynos estraños con tanta estimacion de todos, que la celebre Vniversidad de Praga en el Reyno de Boëmia, aviendo de laurear con el Grado de Doctor en Theologia à vn alumno suyo, por muestra de su veneracion dedicò à V. E. las Conclusiones publicas, que avian de ser el vltimo timbre de su borla, por averlas enriquezido con este glorioso problema: quien debia mas à quien? V. E. à las Mathematicas, ò las Mathematicas à V. E? *Razon entre otras, que me obliga à dedicar à V. E. estos Elementos, para lograr con su letura la censura que solicito, y con el asylo de su grandeza el escudo de que necessito; pues aunque siguiendo el estilo literario hize oficio de Presidente en las Conclusiones que defendiò V. E. como Excelentissimo Maestro, dignandose ser en la censura el primero, como lo fue en la letura, espero conseguir la aprobacion de todos con su autorizado exemplo. Y caso que amenaze riesgos la persecucion de Zoylos, serà mi escudo la grandeza de V. E. que por derecho paternal, y hereditario està obligada à semejantes defensas; pues como si no atendiera à otros muchos empleos, puso todo su conato el padre de V. E. en solicitar professores, y aumentos desta ciencia, inclinando a la Magestad del Rey Catolico fundasse (como fundò) en el Colegio de la Compañia de Jesus de Cadiz vna Cathedra perpetua de Mathematicas, que oy se halla tan frequentada de discipulos, y aficionados, que para satisfacer à tan numeroso concurso parece ser necessario aumentar los Maestros, ò que vno solo se aya de rendir al peso, y frequencia de tanto concurso. Y para que en el interin se pueda de algun modo satisfacer al desseo de tantos con la leccion destos Elementos, salen a la publica luz, fiados en la proteccion de la grandeza de V. E. para que siguiendo su natural inclinacion, y el exemplo de su Excelentissimo padre, los favorezca, ampare, y defienda, y con el favor de tanto, y tan Grande Patrono crezca, y se aumente el estudio Mathematico. N. Señor conceda a V. E. la salud, y felicidades que desseo, y largos años de vida, para el bien publico.*

Exmo. Sor.

De V. E. siervo en el Señor
Jacobo Kresa.

LI-

LICENCIA DEL P. PROVINCIAL.

BArtolomè de Plasencia, Preposito Provincial de la Compañia de Jesus en la Prouincia de Andaluzia. Por particular comision, que para ello tengo de N. M. R. P. Tirso Gonçalez, Preposito General de la Compañia de Jesus, doy licencia al P. Diego Kresa, Religioso Professo de nuestra Compañia de Jesus, para que pueda imprimir los seis libros primeros de los Elementos de Euclides, traducidos, demostrados, y aumentados con algunos Scholios. Item los libros de los solidos, y Proposiciones selectas de Archimedes, assimismo traducidos en Castellano, y demostrados por el mismo Padre. Los quales han sido examinados, y aprobados por personas graves, y doctas de nuestra Compañia, y otras. En testimonio de lo qual dimos estas letras firmadas de nuestro nombre, y selladas con el sello de nuestro oficio, y refrendadas de nuestro Secretario. En nuestra Casa Professa de la Compañia de Jesus de Sevilla en 16. dias del mes de Março de 1689. años.

Bartolomè de Plasencia.

Luis de Montesdoca.
Secr.

ANTES DE LEER CORRIGE LAS SIGVIENTES ERRATAS.

Pagina.	linea.		Corrige
6.	a la marg.(a)6.def.15.		def.18.
52.	4.	BC.	BE.
67.	20.	numero AB.	numero AB 10.
73.	11,	CB 39.	CB 30.
93.	26.		citese en la marg.Fig.15.
Ibid.	a la marg.	15:def.2.	15.def.1.
131.	13.	FGH,	F, G, H.
133.	1.	sean iguales	sea igual.
137.	24.	porque està	.Y porque està

146.

Pagina.	*linea.*		*Corrige.*
146.	12.	superficie	superficies.
171.	20.	AD	HD.
176.	en la fig.	B. 8.	B. 6.
177.	fig,	L. M.	M. L.
		60. 200.	200 60.
183.	11.	C, D	CD
192.	23	GH	G,H
195.	14. y como la B a la C (a) asi la H a la K.		borrese esto
Ibid.	15	(b)	citese (e) 4.P.5.
196.	9.	(a)	citese (b) 23.P.5.
208.	15.	la a	la A
220.	1.	y 4 a 4	y 4 a 3.
222.	16.	como AB, BC	como AB a AC.
227.	1.	al EN	al EH.
Ibid.	25	ADC	ADE.
234.	26	AG	AGC
235.	vlt.		citese Fig. 10.
239.	13	EN	FN
251.	15.	a la BC	a la BG.
253	25	semejantes	equiangulos.
264.	7	GH	GO
270.	5.	BC	BD
329.	1	AD, y BE, y CF	A,D, y B.E, y C.F
334.	5.	a los de DEK	a los DEK
337.	1. proporcionales a las rectas A, y B *corrige* proporcionales. A las rectas A, y B.		
338.	9.	seccion A.	seccion AD
Ibid.	12.	la AG	la EG
350.	20.	IVK.	IVQ.
351.	marg.	e. 1. cor. 4. 4. P. 6.	1. cor. 4. P. 6.
362	22.	rectas CE, EA	recta CA
366.	21	AD	AB
372.	15.	assi TN	assi FN.
373.	13.	FT, YP,	FTYP
388.	10.	sesquialtero	sesquialtera.
Ibid.	11.	equilatera	equilatero
396.	Para la prop. 5.		citese fig. 3.
397.	Para los Corolarios		citese fig. 4.
402	al marg.	(c) 1. cor. P. 12.	cor. 1. P. 12.
404.	18.	BC	BO
439.	6.	liedros	los poliedros.
445.	20.	se el	sea el.

AL

LA nobilissima, y amenissima ciencia de las Mathematicas tiene por objecto la *cantidad*, y por esso lo comprehende todo, cuya practica es necessaria por mar, y tierra. Su nobleza la apoyan sus Professores, Reyes, Principes, y Capitanes. La amenidad testifican clarissimos Autores, que han enriquezido las librerias con esta ciencia. Bien es verdad, que muchos se espantan con solo su nombre, ò con sola su floxedad, è inconstancia, de suerte, que por no ser solos en el ludibrio que merecen, buscan compañeros de la ignorançia que padecen: otros, queriendo empezar por donde debieran acabar, desesperan de saber lo que dessean aprender, y con andar por la Mathematica à saltos, les parece hallar el alivio de su tedio. Tiene la Mathematica, como las otras ciencias, sus Elementos, con los quales todo se ajusta, y sin ellos nada se compone. Veo, que diversos Autores han dado a la estampa estos Elementos en idioma Castellano, cada vno en su tiempo, pero vnos por la antiguedad, otros por la demasiada brevedad salieron arduos à los principiantes, conque para lo claro, y moderno parece que faltaba vna nueva copia. Por esta razon me pareciò acertado bolver en lengua Española estos Elementos para el provecho de todos. En su traduccion he seguido el orden mas recibido de todos los Geometras; al libro quinto he añadido vn Apendiz del Padre *Andres Tacquet* de la Compañia de Jesus, cuyo methodo he tomado en especial en el libro doze, y al pie de la letra en los Theoremas selectos de Archimedes, en que solo explayè mas algunas proposiciones, por querer antes ser largo con claridad, que breve con obscuridad. Què aya escrito de mio? lo verà el estudioso lector, en cuya gracia compuse esta obra, si se dignare de leerla. Vale.

LIBRO



LIBRO PRIMERO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES.

DEFINICIONES.

1. PVnto es el que no tiene partes.

2. Linea es vna longitud ſin latitud. *Las lineas ſe dividen en rectas, curvas, y mixtas, ò compueſtas de vnas, y otras.*

3. Los terminos de la linea ſon puntos.

4. Linea recta es, la que igualmente eſtà entre ſus puntos, ó la menor entre dos puntos.

5. Superficie es, la que tiene ſolamente longitud, y latitud.

6. Los terminos de la ſuperficie ſon lineas.

7. Superficie plana es, la que igualmente eſtà entre ſus lineas, ò a quien ſe ajuſta vna linea recta

por todas partes.

8. Angulo plano es, la inclinacion de dos lineas,
Fig. 1 que se tocan en vn plano, y no componen vna linea.

El angulo se divide en rectilineo, curvilineo, y mixtilineo, como A. B. C.

9. Angulo rectilineo es, el que està contenido de dos lineas rectas, como el angulo A.

Fig. 2 10. Quando vna linea recta cayendo sobre otra recta, haze los angulos de vna, y otra parte iguales entre si; el vno, y el otro de dichos angulos se llama recto, y la que cae se llama perpendicular sobre la otra.

Cayga la linea A B. sobre la C D. haziendo los angulos A B C. A B D. iguales entre si: Digo, que cada vno dellos es angulo recto, y la A B. se llama perpendicular a la CD. y los dos angulos que qualquiera linea recta, cayendo sobre otra, haze de vna, y otra parte, son llamados de los Geometras angulos deinceps, el vno respeto del otro.

11. Angulo obtuso es, el que es mayor que vn recto.

12. Angulo agudo es, el que es menor que vn recto.

Fig. 2 *Cayga la linea E B. sobre la C D. haziendo dos angulos E B C. E B D: digo, que el angulo E B C se llama obtuso, por ser mayor que vn recto; y el angulo E B D. se llama agudo, por ser menor que vn recto.*

13. Termino es el extremo de cada cosa.

14. Figura es la que està contenida de alguno, ò de algunos terminos.

Fig. 3 15. Circulo es vna figura plana, contenida de vna sola linea, llamada circumferençia, hasta la qual to-

todas las lineas rectas tiradas de vn punto de los que estàn dentro, son iguales entre si, como la figura B D C E A.

16. Este punto se llama centro del circulo, como el punto A.

17. Diametro del circulo es vna linea recta, que tirada por el centro, y de ambas partes terminada en la circunferencia, divide el circulo en dos partes iguales.

18. Semicirculo es vna figura contenida del diametro, y de la mitad de la circunferencia del circulo, como la figura B D C A.

19. Figura rectilinea es, la que està contenida de lineas rectas.

20. Las figuras que estàn contenidas de tres lineas rectas, se llaman trilateras.

21. Las que de quatro, quadrilateras.

22. Las que estàn contenidas de mas que de quatro lineas, se llaman multilateras.

23. De las figuras trilateras la que tiene todos tres lados iguales entre si, se llama triangulo equilatero, como la figura A.

24. La que tiene solamente dos lineas iguales entre si, se llama triangulo isosceles, como la figura B. Fig. 4

25. La que tiene todos tres lados desiguales, se llama triangulo escaleno, como la figura C.

26. Ademàs, la que tiene vn angulo recto, se llama

ma

ma triangulo rectangulo, como la figura B.

27. La que vn obtuso, triangulo obtusangulo, ò amblygonio, como la figura C.

28. La que tiene todos tres angulos agudos, se llama triangulo acutangulo, ò oxigonio, como la figura A.

Por las seis definiciones immediatas consta, que los triangulos se especifican de sus lados, y de sus angulos; los que se especifican de sus lados son: equilatero, isosceles, escaleno; los que de sus angulos, son: rectangulo, amblygonio, oxigonio.

29. De las figuras quadrilateras el quadrado es, la que tiene todos sus lados iguales, y todos sus angulos rectos, como la figura D.

30. Quadrilongo es, la que tiene todos sus angulos rectos, pero no todos los lados iguales, como la figura E.

31. Rhombo es, la que tiene todos sus lados iguales, y ningun angulo recto, como la figura F.

32. Rhomboides es, la que tiene lados, y angulos opuestos iguales, pero ni es equilatera, ni equiangula, como la figura G.

33. Fuera destas quatro, las demàs figuras quadrilateras, se llaman trapezias, como la fig. H.

Fig. 5 34. Paralelas son lineas rectas, que estando en vn mismo plano, alargadas hàzia vnas, y otras partes in infinitum, no pueden concurrir, como las lineas A B. y C D.

35. Paralelogrammo es vna figura quadrilatera, cuyos lados opuestos son paralelos.

Quan-

36. Quando en vn paralelogrãmmo se tira el diametro, y por vn punto dèl dos paralelas a los lados, de suerte que quede diuidido en quatro paralelogrammos, los dos por quienes passa el diametro, se llaman *circa diametrum*; y los otros dos se llaman sus *complementos*, como en la figura ABCD. Fig. 6

PETICIONES, ò POSTULADOS.

1. Pidese poder tirar vna linea recta, de qualquier punto a qualquier punto dado.
2. Alargar vna linea recta terminada quanto se quisiere.
3. De qualquier centro, y con qualquier distancia describir vn circulo.

AXIOMAS, ò COMUNES SENTENCIAS.

1. Las cosas que son iguales a vna misma, son entre si iguales.

De aqui se infiere que si vna cantidad es mayor, ò menor que vna de las iguales, serà tambien mayor, ò menor que la otra; y al contrario.

2. Si a cosas iguales se añaden iguales, los todos seràn iguales.
3. Si de cosas iguales se quitan iguales, los residuos seràn iguales.
4. Si a cosas desiguales se añaden iguales, los todos seràn desiguales.

Si

5. Si de coſas deſiguales ſe quitan iguales, los reſiduos ſeràn deſiguales.

6. Las coſas que ſon duplas de vna miſma, ſon iguales entre ſi. Y ſi vna coſa es dupla de vna de las iguales, tambien ſerà dupla de la otra.

7. Las coſas que ſon mitades de vna miſma, ſon iguales entre ſi: y al contrario ſi de dos coſas iguales la vna es dupla de alguna, la otra tambien lo ſerà.

8. Las coſas que entre ſi convienen, ſon iguales entre ſi.

Si dos cantidades ſobrepueſta la vna a la otra, de ſuerte ſe ajuſtan entre ſi, que ninguna excede a la otra, eſtas ſe dizen convenir entre ſi.

9. El todo es mayor que ſu parte.

10. Dos lineas rectas no pueden tener vn ſegmento comun.

Fig. 7 *Porque ſi eſto es poſsible ſean ADB. y ADC. cada vna, vna linea recta, que tengan el ſegmento AD. comun, luego la linea ALC. que paſſa por el cen-*
(a) *tro ſerà diametro, y dividirà la circunferencia en dos mitades, luego (a)*
def. 15 *ALC. ſerà la mitad de la circunferencia; pero tambien la ADB. paſſa por*
(b) *el centro, luego dividirà la circunferencia en dos mitades, y ſerà ALCB. la*
ax. 7. *mitad de la circunferencia, luego (b) la circunferencia ALC. ſerà igual a*
(c) *la circunferencia ALCB. la parte a ſu todo (c) lo que no puede ſer, luego &c.*

ax. 9. 11. Dos lineas rectas, que concurren en vn punto, ſi ambas ſe alargan neceſſariamente ſe cortan en aquel punto.

12. Todos los angulos rectos ſon iguales entre ſi.

13. Si vna linea recta cayendo ſobre otras dos lineas rectas, haze los angulos internos, y de la miſma parte menores que dos rectos, las tales

lineas alargadas infinitamente concurriràn hàzia aquella parte, donde los angulos fueren menores que dos rectos.

Sean las lineas AB. CD. y cayga sobre ellas la linea EF. haziendo los angulos BEF. DFE. internos, y de la misma parte menores que dos rectos: digo, que las lineas AB. CD. prolongadas infinitamente concurriràn hàzia las partes B. y D. Fig. 8

14. Dos lineas rectas no pueden encerrar vn espacio.

15. Si à cosas iguales se añaden desiguales, serà el excesso de las enteras, igual al excesso de las añadidas.

16. Si à cosas desiguales se añaden iguales, serà el excesso de las compuestas, igual al excesso de las primeras.

17. Si de cosas iguales se quitan desiguales, serà el excesso de los residuos, igual al excesso de las quitadas.

18. Si de cosas desiguales se quitan iguales, serà el excesso de los residuos igual al excesso de las primeras.

19. El todo es igual a todas sus partes juntas.

20. Si vn entero es duplo de otro, y lo quitado duplo de lo quitado, el residuo serà duplo del residuo.

EXPLICACION DE LAS CITACIONES *marginales.*

Def. 1. *Definicion primera, &c.*

15. Def. 1. *Definicion decima quinta del libro primero, &c*
Post. 2. *Postulado segundo, &c.*
Ax. 3. *Axioma tercero, &c.*
4. P. 1. *Proposicion quarta del primer libro.*
3. P. 6. *Proposicion tercera del libro sexto.*
4. P. d. *Quarta proposicion deste libro.*

Y en esta misma forma se citan las proposiciones de todos los libros, siendo el primer numero el de su orden, y el segundo el del libro adonde pertenecen: si no es en el primer libro; donde el numero denota la proposicion antecedente del mismo libro.

PROBLEMA 1. PROPOSICION 1.

Sobre vna linea recta dada terminada, formar vn triangulo equilatero.

Fig. 9 Sea la linea dada AB, sobre la qual se ha de formar vn triangulo equilatero. Del punto B, como (a) *Post. 3.* de centro, con la distancia BA (a) describase el circulo ACE, y del centro A. con la misma distancia descrivase otro circulo BCD, y al punto C (b) *Post. 1* en que se cortan estos dos circulos, tirense (b) las dos lineas rectas CA. CB: Digo, que el triangulo ACB es equilatero; porque siendo A el centro del circulo BCD, las lineas AB. AC. desde el centro (c) *defin. 15.* hasta la circumferencia del mismo circulo (c) son iguales entre si. Tambien siendo B el centro del circulo ACE (c) la linea AB es igual a la linea

nea BC, pero la linea AC eſtà tambien demoſtra-
da igual a la miſma A B, luego las dos lineas *A C.* (d)
y BC ſon iguales a la AB, luego (d) tambien ſon *ax. 1.* (e)
iguales entre ſi, luego (e) el triangulo ACB. es *defin.*
equilatero, que es lo que ſe avia de hazer. 23.

PROBLEMA 2. PROPOSICION 2.

Dada vna linea, y dado vn punto. tirar deſde èl vna linea recta, igual a la linea dada.

Sea la linea dada AB. y el punto C: por èl, y por *Fig.*
qualquier extremo de la linea dada, como B. tireſe 10.
(a) la linea recta CB, y ſobre ella (b) formeſe vn (a) *Poſt. 1*
triangulo equilatero BDC, y alarguenſe (c) las (b)
lineas DB. DC, y del punto B. con la diſtancia *Prop.* 1.
BA deſcribaſe (d) el circulo EAF, y del punto D. (c)
con la diſtancia DE deſcribaſe el circulo EGH: *Poſt. 2*
Digo, que la linea CG. es igual a la linea dada AB. (d) *Poſt. 3*
Porque ſiendo el punto D centro del circulo EGH (e)
(e) las lineas DE, DG. ſon iguales entre ſi, y qui- *defin.*
tando las DB. DC. (f) iguales, quedaràn (g) las 15. (f)
reſiduas BE. CG. iguales: tambien (e) la BA es *Prop. 1*
igual a la *B*E, luego las dos lineas CG. A*B* ſon igua- (g) *ax. 3.*
les à vna tercera *B*E, luego (h) tambien ſon igua- (h)
les entre ſi: que es lo que ſe avia de hazer. *ax. 1.*

PROBLEMA 3. PROPOSICION 3.

Dadas dos lineas rectas desiguales, cortar de la mayor vna linea igual a la menor.

Sea la linea mayor AB, la menor C, se ha de cortar de la linea AB vna igual a la C. Tirese desde (a) el punto A de la mayor la linea AD igual a la C. dada, y de A, como centro, con la distancia AD describase el arco FE, que corta la linea AB en el punto E: digo, que el segmento AE es igual a la linea C. Porque la linea C. es igual a la linea AD por la construccion, la linea AE tambien (b) es igual a la AD, luego las dos lineas AE, y C son iguales a la linea AD, luego (c) tambien iguales entre si: que es lo que se avia de hazer.

Fi. 11 (a) Prop. 2 (b) defin. 15. (c) ax. 1.

THEOREMA 1. PROPOSICION 4.

Si dos triangulos tuvieren dos lados iguales a dos lados, el vno a el vno, y el otro al otro, y entre estos lados comprehendieren iguales angulos, tendràn tambien iguales bases, y todo el triangulo serà igual a todo el triangulo, y los demàs angulos, que se oponen a iguales lados, seràn iguales.

Sean los dos triangulos ABC, DEF, y el lado AB sea igual al lado DE, y el AC al DF, y el angulo BAC igual al angulo EDF: digo, que tambien la base BC serà igual a la base EF, y todo el triangulo

Fi. 12 13.

ABC

ABC ſegun ſu eſpacio ſerà igual a todo el triangulo DEF, y los angulos ABC, DEF ſeràn iguales, y tambien los ACB, DFE opueſtos a iguales lados. Porque imagineſe pueſto el punto *D* ſobre el punto *A*, y la linea DE ſobre la linea AB, eſtas dos lineas ſe ſuponen iguales, luego (a) ſe ajuſtan, y el punto E caìrà ſobre el punto B, y la linea DF caìrà ſobre la linea AC, porque el angulo BAC ſe ſupone igual al angulo EDF, pero ſi la linea DF cayera fuera del triangulo ABC, el angulo EDF ſeria mayor que el angulo BAC, y ſi cayeſſe dentro del triangulo ABC, el angulo EDF ſeria menor que el angulo BAC, luego la linea DF, en eſta imaginaria ſobrepoſicion ha de caer ſobre la linea AC, y (a) ſe ajuſtaràn, porq̃ ſon iguales, luego el punto F ha de caer ſobre el punto C, luego tambien la baſe EF ha de caer ſobre la baſe BC, porque ſi la baſe EF, cuyos extremos puntos E, y F coinciden con los extremos puntos *B*, y *C*. no ſe ajuſtàra con la linea BC, ſi cayera, ò abaxo, como BGC, ò dentro del triangulo, como BHC, y aſsi dos lineas rectas comprehenderian vn eſpacio, lo (b) que no puede ſer, luego ſe ajuſtan las baſes BC. EF, luego (a) ſon iguales, y todo el triangulo EDF ſe ajuſta con todo el triangulo BAC, luego (a) ſon iguales los triangulos BAC. EDF, y tambien el angulo ACB ſe ajuſta con el angulo DFE, luego (a) ſon iguales, y el angulo ABC ſe ajuſta tambiẽ con el angulo DEF, luego ſon iguales

(a) ax. 8.

(a) ax. 8.

(b) ax. 14.

(a) ax. 8.

luego si dos triangulos tuvieren,&c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 2. PROPOSICION 5.

De los triangulos isosceles, los angulos sobre la base son iguales entre si; y prolongados los lados iguales, los angulos que quedan debaxo de la base son tambien iguales entre si.

Fig. 14. Sea el triangulo ABC. el qual tenga los lados AB. AC iguales: digo, que los angulos ABC, y ACB sobre la base, son iguales entre si, y prolongados los lados AB, AC, tambien los angulos DBC, y ECB debaxo de la base, son iguales entre si. De la linea AC. alargada, tomese de qualquier longitud la linea AE. y de la otra AB. alargada in infinitum (a) Prop. 3 (a) cortese la linea AD igual a la linea AE, y tirense (b) Post. 1 (b) las lineas BE. DC, y quedaràn formados dos triangulos ABE. y ACD. En el primer triangulo ABE. dos lados son iguales a dos lados del segundo triangulo ACD. conviene a saber el lado AB del primero, al lado AC. del segundo, y el lado AE del primero al lado AD. del segundo, y el (c) Prop. 4. angulo A comun a entrambos, luego (c) las bases BE, y CD son tambien iguales entre si, y el angulo AEB igual al angulo ADC, y el tercero ABE igual al tercero ACD.

Con-

Confiderenfe tambien otros dos triangulos
BDC el vno, y CE*B* el otro, en quienes la linea
BD del primer triangulo, es igual (d) a la linea (d)
CE del fegundo, y la DC del primero igual a la *ax. 3.*
E*B* del fegundo, y el angulo *BDC* igual al angulo
CEB, como eftà demoftrado, luego (e) el angulo (e)
DBC es igual al angulo ECB, que eftàn debaxo *1 rop.*
de la bafe, y el tercero DCB es igual al tercero 4.
EBC, luego fi quitamos eftos dos angulos DCB.
EBC iguales entre fi, de los angulos ACD. ABE,
que fe demoftraron iguales en los primeros trian-
gulos, quedaràn (f) los angulos ACB. ABC tam- (f)
bien iguales, los quales eftàn fobre la bafe BC; lue- *ax. 3.*
go, &c. que es lo que fe avia de demoftrar.

Otra demonftracion de la mifma.

Sea el triangulo ABC, que tenga los lados AB. AC iguales entre fi: digo, *Fig.*
que los angulos ABC. ACB fobre la bafe BC fon iguales entre fi; y fi fe alargan *15.*
los lados AB. AC hàzia D, y E, los angulos debaxo de la bafe, que fon DBC, y
ECB fon tambien entre fi iguales. Porque fi el triangulo ABC (que eftà feña-
lado con el numero 1.) fe imagina buelto el mifmo, como es en el triangulo
ACB (feñalado con el numero 2.) feràn en eftos dos triangulos (que fe for-
maron con la imaginacion por aquella buelta) en el primero los lados AB. AC.
iguales a los lados AC. AB. del fegundo triangulo, el vno a el vno, y el otro al
otro, y el angulo BAC. en el primer triangulo, es igual al angulo CAB del fe-
gundo triangulo, luego (a) el angulo ABC en el primer triangulo es igual al (a)
angulo ACB del fegundo triangulo, pero el angulo ACB del fegundo triangu- *Prop.*
lo, es el mifmo angulo ACB. del primer triangulo; luego en el primer triangu- 4.
lo los angulos ABC. ACB. que eftàn fobre la bafe, fon iguales entre fi.

Demàs defto, el lado AD del primer triangulo fe ajufta (b) con el lado AE. (b)
del fegundo triangulo, fi fe imagina puefto vno fobre otro, y la bafe BC. del *ax. 8.*

pri-

primer triangulo se ajusta con la base CB (c) del segundo triangulo, luego el
(c) *angulo DBC debaxo de la base del primer triangulo se ajusta con el angulo*
Prop 4 *ECB debaxo de la base del segundo triangulo: luego (b) los angulos DBC.*
(b) *ECB. en los dos triangulos son iguales: pero el angulo ECB. debaxo de la base*
ax. 8. *del segundo triangulo, es el mismo que el angulo ECB debaxo de la base del primer triangulo, luego los angulos DBC. ECB. debaxo de la base en el triangulo isosceles son iguales entre si, que es lo, &c.*

COROLARIO.

Fi. 16 De aqui se sigue, que si en algun triangulo como ABC todos tres lados son iguales, tambien todos tres angulos serán iguales entre si. Porque por ser los lados AB, AC iguales, los angulos B, y C. sobre la base (d) son iguales, tambien por ser los lados BA, BC iguales, los an-
(d) gulos A, y C sobre la base, son entre si iguales, luego todos tres angu-
Prop. 5 los A, B, C son iguales entre si.

THEOREMA 3. PROPOSICION 6.

Si dos angulos de vn triangulo son iguales entre si, los lados opuestos a iguales angulos, serán tambien iguales entre si.

Fi. 17 En el triangulo ABC sean los angulos ABC, y ACB iguales entre si: digo, que los lados AC, AB, que se oponen a estos angulos, son iguales entre si. Porque si los lados AC. AB no son iguales entre si, será vno dellos mayor que el otro: sea pues AB mayor que AC, y de AB cortese (a) BD igual al
(a) lado AC, tirese (b) la linea DC, y quedarán for-
3. Prop. mados los dos triangulos DBC, y ACB. En el pri-
(b) Post. 1 mer triangulo los dos lados DB, BC son iguales a los

los dos lados AC, CB del ſegundo triangulo, el vno a el vno, y el otro al otro, y el angulo DBC del primer triangulo igual al angulo ACB del otro triangulo, luego (b) tambien la baſe DC es igual a la baſe AB, y el triangulo DBC, ſegun ſu eſpacio, ſerà igual al triangulo ACB, ſegun ſu eſpacio, la parte a ſu todo (c) lo que no puede ſer, luego AB no puede ſer mayor que AC, ni tampoco menor, luego ſerà igual; luego ſi dos angulos, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

(b) *Prop.* 4

(c) *ax.* 9.

COROLARIO.

De aqui ſe ſigue, que ſi todos los tres angulos de vn triangulo ſon iguales entre ſi, tambien todos los tres lados ſon iguales entre ſi; porque por ſer los angulos B, y C. iguales, ſon (d) los lados BA, CA. iguales entre ſi, y por ſer los angulos C, y A iguales, ſon los lados BA, y BC iguales, luego todos los tres lados ſon iguales entre ſi.

Fi. 16

(d) *Prop.* 6

THEOREMA 4. PROPOSICION 7.

Si dos lineas rectas tiradas de las extremidades de vna miſma linea recta, ſe encuentran en vn punto, no ſe podràn tirar de las miſmas extremidades a otro punto, y hàzia la miſma parte, otras dos lineas rectas iguales a las primeras, cada vna a la que nace de la miſma extremidad.

Sea la linea recta AB, de cuyas extremidades A, y

Fi. 18

y B. tirense las dos lineas rectas AC. BC. que concurran en el punto C: digo, que de las mismas extremidades A. y B. no se pueden tirar hazia la misma parte, y a otro punto diferente, como es el D. otras dos lineas rectas iguales a las primeras, cada vna a la que nace de la misma extremidad, conviene a saber AD igual a AC, y BD igual a BC; porque si pueden ser iguales, sea la AC igual a la AD, y la BC igual a la BD, tirese la linea CD, y quedaràn formados dos triangulos ACD, y BCD, y porque en el triangulo ACD, los lados AC, y
(a) 5.P.1 AD se dizen ser iguales entre si, seràn (a) los angulos ACD, ADC iguales entre si sobre la base CD. luego quitando del angulo *ACD* el angulo ACB, quedarà el angulo BCD menor que el angulo ADC, y si al angulo *ADC* se añade el angulo BDA, serà el angulo BDC, mucho mayor que el angulo BCD; pero si el lado BD es igual al lado BC, el angu-
(b) 5.P.1 lo BDC (b) serà igual al angulo BCD, que està demostrado menor que el angulo BDC, luego la linea BD no puede ser igual a la BC. luego si dos lineas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 5. PROPOSICION 8.

Si dos triangulos tienen dos lados iguales a dos lados, el vno a el vno, y el otro al otro, y la base igual a la base, tendràn tambien los angulos opuestos a las bases iguales entre si.

Sean

Sean los triangulos ABC, DEF, y tengan los lados AB, DE iguales entre si, y AC, DF tambien iguales entre si, y la base BC igual a la base EF: digo, que los angulos BAC, y EDF opuestos a las bases, son iguales entre si; porque si la base BC se pone sobre la base EF [como en la fig. 2.] se ajustan (c) de suerte que el punto B cae sobre el punto E, y el punto C. sobre el punto F; y si el triangulo BAC se imagina caer hàzia la parte D. la linea BA ha de caer sobre la linea ED, y la linea AC sobre la linea DF: porque si la linea BA no cayera sobre la linea DE, y la CA sobre la FD, serian dos rectas BA, y ED iguales entre si, y tambien CA, FD iguales entre si, lo que (d) no puede ser; luego ha de caer la linea BA sobre la linea ED, y la CA sobre la FD, y el angulo BAC se ajusta con el angulo EDF, luego (e) son iguales entre si los angulos BAC, EDF, luego si dos triangulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 19. (c) axiom. 8. (d) 7. P. 1. (e) axiom. 8.

** Demuestrase esta proposicion sin la septima.*

Sean los mismos triangulos ABC, DEF, y imaginese puesto el punto B sobre el punto E, y la linea BC sobre la linea EF, luego (a) el punto C caira sobre el punto F, por suponerse las bases BC, EF iguales, y imaginese el triangulo BAC caer a la parte opuesta, tirese la linea DA, y sera el triangulo AED isosceles, por suponerse los lados ED, EA iguales entre si, luego (b) los angulos EDA, EAD sobre la base, son iguales entre si. Tambien en el triangulo AFD los dos lados FD, FA son iguales entre si, luego (b) el angulo FDA es igual al angulo FAD, luego si a iguales angulos EDA, EAD añadimos iguales angulos FDA,

Fig. 20. (a) axiom. 8. (b) 5. P. 1.

(c) ax. 2. *FAD, (c) como todos EDF, y EAE, ò BAC, quedaràn iguales: que es lo que, &c.*

(d) 4 Prop. *Demostrada la igualdad de los angulos A, y D, tambien (d) los demas angulos, que se oponen a iguales lados, son iguales entre si, y todo el triangulo igual a todo el triangulo.*

PROBLEMA 4. PROPOSICION 9.

Cortar qualquier angulo rectilineo dado, en dos angulos iguales.

Fig. 21. Sea el angulo dado BAC, que se ha de cortar en dos angulos iguales: tomese la linea AB de qualquier longitud, y de la otra AE alargada, cortese (a) la AC igual a la linea AB, tirese la linea BC, y sobre la linea BC formese (b) el triangulo equilatero BDC, y tirese la linea AD: digo, que esta linea AD corta el angulo BAC en dos angulos iguales; porque en los dos triangulos BAD, CAD, los dos lados BA, CA son iguales entre si, y el lado AD comun a entrambos, y la base BD en el primer triangulo, es igual a la base CD del otro triangulo por la construccion, luego (c) los angulos opuestos a estas bases, que son BAD, CAD, son iguales entre si, luego el angulo BAC està partido en dos angulos iguales: que es lo que se avia de hazer.

(a) 3. P. 1. (b) 1. P. 1. (c) 8. P. 1.

PROBLEMA 5. PROPOSICION 10.

Dada vna linea recta terminada, partirla en dos partes iguales.

Sea

Sea la linea dada AB, que se ha de partir en dos partes iguales: formese (d) sobre ella vn triangulo equilatero ABC, y partase (e) el angulo ACB en dos iguales con la linea CD: digo, que la linea CD parte a la linea AB en dos partes iguales AD, BD; porque en los triangulos ACD, BCD, los lados AC, BC son iguales, y el CD comun, y el angulo ACD de el primer triangulo, es igual al angulo BCD del segundo, luego (f) la base AD es igual a la base BD, luego la linea AB està partida en dos partes iguales: que es lo que se avia de hazer. Fig. 22. (d) 1. P. 1. (e) 9. P. 1. (f) 4. P. 1.

PROBLEMA 6. PROPOSICION 11.

Sobre vna linea recta dada, a vn punto en ella dado, levantar vna perpendicular.

Sea la linea dada BC, y en ella vn punto A, tomese de vna parte de la linea dada, la AB de qualquier longitud, y de la otra parte alargada cortese (a) à la AB igual la AC, y sobre la linea BC formese (b) el triangulo equilatero BDC, y tirese la linea AD: digo, que la linea AD es perpendicular sobre la linea BC; porque en los triangulos BAD, CAD, los lados BA, CA son iguales, y el AD comun, la base BD igual a la base CD, luego (c) el angulo BAD es igual al angulo CAD, luego (d) la linea AD es perpendicular so- Fig. 23. (a) 3. P. 1. (b) 1. P. 1. (c) 8. P. 1. (d) defin. 10.

sobre la linea *BC*, que es lo que se avia de hazer.

PROBLEMA 7. PROPOSICION 12.

Sobre vna linea recta dada no terminada, y de vn punto dado fuera della, tirar vna perpendicular.

Fig. 24. Sea la linea dada *AB*, y fuera della el punto C.
(a) Post. 3. Desde el punto C. como centro (a) describase vn
(b) circulo, que corte la linea *AB* en dos puntos, co-
10. P. 1. mo D, y E, y partase (b) la linea DE en dos mitades en el punto F, y tirese la linea CF: digo, que esta es la perpendicular sobre la *AB*; porque tiradas las lineas CD, CE en los triangulos DFC, EFC los lados DF, y EF son iguales, y FC co-
(c) defin. 15. mun, y la base (c) DC igual a la base *EC*, luego (d)
(d) el angulo *DFC* es igual al angulo *EFC*, luego (e)
8. P. 1. la linea *CF* es perpendicular sobre la linea *AB*,
(e) defin. 10. que es lo que se avia de hazer.

THEOREMA 6. PROPOSICION 13.

Quando vna linea recta, cayendo sobre otra recta, haze angulos, ò harà dos angulos rectos, ò iguales à dos rectos.

Fig. 25. Sobre la linea recta *AB* cayga la linea recta *DC*, haziendo dos angulos *DCA*, *DCB*: digo, que aquestos

aquestos angulos, ò seràn dos rectos; ò iguales à dos rectos; porque si la linea *DC* es perpendicular a la *AB*, los dos angulos *DCA*, *DCB* (a) seràn rectos: y si la linea *DC* no es perpendicular a la linea *AB*, levantese (b) la perpendicular *CE*, luego (a) los angulos *ACE*, *ECB* son rectos; pero los angulos *ACE*, *ECB* son iguales (c) a los tres angulos *ACE*, *ECD*, *DCB* juntos, luego los tres angulos *ACE*, *ECD*, *DCB* son iguales a dos rectos: tambien los angulos *ACD*, y *DCB* juntos (c) son iguales a los tres angulos ACE, ECD, DCB juntos, luego (d) los dos angulos rectos ACE, y ECB juntos, son tambien iguales a los dos angulos ACD, y DCB juntos: que es lo que se avia de demostrar.

(a) 1 defin. 10.
(b) 11. p. 1.
(c) ax. 19.
(d) axiom. 1.

THEOREMA 7. PROPOSICION 14.

Si a vna linea recta, y a vn punto dado en ella se tiran dos lineas rectas, no de la misma parte, haziendo los angulos de vna, y otra parte iguales a dos rectos; las tales lineas rectas se encontraràn directamente, y compondràn vna misma linea recta.

Fig. 26.

Sea la linea recta AB, y a su punto *B* concurran las dos lineas rectas CB, DB de diversas partes, haziendo los dos angulos ABC, ABD iguales a dos rectos: digo, que estas dos lineas CB, y DB se encuentran directamente en el punto *B*, y componen vna mis-

mismalinea recta; porque si la linea CB alargada, no conviene con la linea BD, ò caira arriba, ò debaxo en vno de los puntos E, luego (e) los angulos CBA, ABE juntos, seràn iguales a dos rectos, tambien los angulos CBA, ABD juntos, son iguales a dos rectos por la suposicion, luego (f) los angulos CBA, ABE juntos, son iguales a los angulos CBA, ABD juntos, luego si de cada parte quitamos el mismo angulo CBA, quedaràn (g) los angulos ABE, ABD iguales entre si, la parte al todo, ò el todo a su parte, lo que (h) no puede ser, luego la linea CB alargada conviene con la linea BD: luego si a vna linea recta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(e) 13. p. 1.
(f) axiom. 1.
(g) axiom. 3.
(h) axiom. 9.

THEOREMA 8. PROPOSICION 15.

Si dos lineas rectas se cortan entre si, haràn los angulos verticales iguales.

Cortense las dos lineas AB, CD en el punto E: digo, que los angulos verticales, como AED, CEB, son iguales entre si; porque los angulos *CEA*, *AED* juntos (a) son iguales a dos rectos, tambien los angulos CEA, CEB juntos (a) son iguales a dos rectos, luego (b) los angulos CEA, AED juntos, son iguales a los angulos CEA, CEB juntos, luego quitando de entrambas partes el angulo comun CEA, los angulos AED, CEB (c) quedaràn iguales entre si: que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 27.
(a) 13. p. 1.
(b) axiom. 1.
(c) axiom. 3.

COROLARIO.

Fig. 27. De aqui se sigue, que todos los angulos, que se pueden formar en vn

vn punto, son iguales a quatro rectos; porque los angulos (d) AED, (d)
DEB son iguales a dos rectos, y los verticales opuestos (e) AEC, BEC 13. p. 1.
iguales a los antecedentes; y si huviere mas lineas, que concurran en el (e)
punto E. partirán los quatro angulos en menores; pero quedarán todos 15. p. 1
dos juntos (f) iguales a los quatro antecedentes, que son iguales a (f)
quatro rectos. ax. 19.

THEOREMA 9. PROPOSICION 16.

De qualquier triangulo prolongado vn lado, el angulo externo es mayor, que qualquiera de los internos opuestos.

Sea el triangulo ABC, y alarguese el lado BC Fig. 28.
hàzia D: digo, que el angulo externo ACD, es mayor que el CBA, ò CAB. [Esta proposicion no habla del angulo immediato ACB, que se llama angulo *deinceps*, porque este puede ser igual, ò mayor que el externo immediato.] Partase (a) (a)
la linea BC en dos partes iguales en el punto E, 10. p. 1.
y tirese la linea AE, y alarguese hàzia H, y tomese (b) EF igual a la linea AE, tirese la linea (b)
FC, y alarguese hàzia G: digo, que el angulo ACD 3. p. 1.
es mayor que el angulo ABC; porque en los triangulos BEA, CEF, los lados BE, y AE del vno, son iguales a los lados CE, y EF del otro, cada vno al su- (c)
yo, y el angulo BEA es igual (c) al angulo CEF, 15. p. 1.
luego (d) la base AB es igual a la base CF, y el angulo (d)
EBA igual al angulo ECF; pero el angulo GCD (e) 4. p. 1.
es igual al angulo ECF, luego los angulos (e) EBA, y (e)
GCD son tambien iguales entre si; pero el angulo axiom. 1.
ACD (f) es mayor que el angulo GCD, luego tam- (f)
bien es mayor (e) que su igual ABC. ax. 9.

(b) Fig. 29. Para demostrar, que el angulo externo ACD es mayor que el angulo BAC, partase el lado AC en dos partes iguales en el punto E, tirese la recta BE, y alarguese hazia F; tomese EF igual a BE, y tirese la linea CF: y porque en los triangulos BEA, FEC los lados BE, EA del vno, son iguales a los lados FE, EC del otro, cada vno al suyo, y el an-
(c) 15. P. 1. gulo BEA (c) igual al angulo FEC, luego (d) el
(d) 4. P. 1. angulo BAE es igual al angulo FCE, pero el an-
(f) axiom. 9. gulo ACD (e) es mayor que el angulo FCE, luego tambien es mayor que el angulo BAC su igual, luego de qualquier triangulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 10. PROPOSICION 17.

De todo triangulo dos angulos, de qualquier suerte que se tomen, son menores que dos rectos.

Fig. 30. En el triangulo ABC tomense qualesquiera dos angulos, como CAB, ABC: digo, que juntos son menores que dos rectos; porque alargado el lado
(a) 16. P. 1. *CA* hazia D, el angulo externo DAB (a) es mayor que el interno opuesto *ABC*, luego si a cada vno añadimos el angulo BAC, los dos angulos DAB, y
(b) Axiom. 4. CAB, (b) quedaràn desiguales, y mayores que los dos *ABC*, *CAB*; pero los dos angulos *DAB*, *CAB*
(c) 13. P. 1. juntos (c) son iguales a dos rectos, luego los dos an-

gu-

gulos *CAB*, *ABC* juntos, son menores que dos rectos: que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIOS.

1. De aqui se sigue, que de todo triangulo que tuviere vn angulo recto, ò obtuso, los otros dos son agudos.
2. Que todos los angulos de qualquier triangulo equilatero son agudos; y de los triangulos isosceles, los angulos sobre la base siempre son agudos.
3. Que de vn mismo punto como B, sobre vna misma linea recta AC, no puede caer mas que vna perpendicular, como la BE. Y que en vn triangulo, si los angulos A, y C son agudos, la perpendicular desde B sobre la linea AC, ha de caer entre A, y C.

THEOREMA 11. PROPOSICION 18.

En qualquier triangulo el lado mayor se opone al mayor angulo.

En el triangulo *ABC*, el lado *AC* sea mayor que el lado *AB*: digo, que el angulo *ABC* opuesto al mayor lado, es mayor que el angulo *ACB* opuesto al menor lado *AB*; del mayor lado *AC* (a) cortese la linea *AD* igual al menor lado *AB*, y tirese la linea *BD*. En el triangulo *BAD* los lados *AB*, *AD* son iguales entre si, luego (b) el angulo *ABD* es igual al angulo *ADB*; pero el angulo *ABC* (c) es mayor que el angulo *ABD*, luego (d) tambien es mayor que el angulo *ADB*; pero el angulo *ADB* es mayor que el angulo (e) *ACB* el externo q̃ su interno opuesto, luego el angulo *ABC* es mucho mayor que el angulo *ACB*: que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 31.
(a) 3. P. 1.
(b) 5. P. 1.
(c) axiom. 9.
(d) axiom. 1.
(e) 16. P. 1.

COROLARIO.

De aqui ſe ſigue, que de vn triangulo eſcaleno todos los angulos ſon deſiguales entre ſi.

THEOREMA 12. PROPOSICION 19.

En qualquier triangulo el angulo mayor ſe opone a mayor lado.

Fig. 32. En el triangulo ABC el angulo *B* ſea mayor que el angulo A: digo, que el lado AC opueſto al angulo *B* es mayor que el lado BC opueſto al angulo A. Porque ſi el lado AC no es mayor que el lado BC, ò ſeràn iguales los lados AC, y BC, ò AC ſerà menor que BC; pero AC no puede ſer igual al BC,
(a) 5.l.1. porque los angulos B, y A (a) quedarian iguales, que es contra lo ſupueſto. Tampoco AC puede ſer menor que BC; porque ſi AC fueſſe menor que BC,
(b) 18.l.1. (b) el angulo B ſeria menor que el angulo A, tambien contra lo ſupueſto: luego no pudiendo ſer AC igual a la BC, ni tampoco menor, ſerà mayor
(c) que BC: que es lo que ſe avia de demoſtrar.

COROLARIO.

De aqui ſe ſigue, que de todas las lineas rectas tiradas del punto C
Fig. 33. ſobre la recta AB, la perpendicular CD es la minima, y la mas cercana a eſta como CE, menor que la mas diſtante CA.

THEOREMA 13. PROPOSICION 20.

De qualquier triangulo qualesquiera dos lados juntos son mayores que el tercero.

En el triangulo ABC: digo, que qualesquiera dos lados, como AB, AC juntos, son mayores que el tercero BC. Alarguese el lado CA, y (a) tomese AD igual a la AB, y tirese la linea BD. En el triangulo isosceles ABD los angulos ABD, ADB sobre la base (b) son iguales; pero el angulo DBC (c) es mayor que el angulo ABD: luego (d) tambien es mayor que el angulo ADB: luego (e) en el triangulo DBC al angulo mayor DBC se opone el mayor lado DC, y al angulo menor D se opone el menor lado BC; pero el lado DC es igual a los dos lados BA, AC juntos, porque DA se tomò igual a BA, y AC es comun: luego los lados BA, y AC juntos, son tambien mayores que el lado BC: luego de qualquier triangulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 34.
(a) 3. p. 1.
(b) 5. p. 1.
(c) axiom. 9.
(d) axiom. 1.
(e) 19. p. 1.

THEOREMA 14. PROPOSICION 21.

Si sobre un lado de un triangulo, y de las extremidades del,

dèl, se tiran dos lineas rectas, que concurran en vn punto dentro del triangulo, las tales lineas seràn menores, que los otros dos lados dèl triangulo propuesto; pero contendràn vn angulo mayor que el angulo comprehendido de los otros dos lados del triangulo propuesto.

Fig. 35. En el triangulo BAC, de las extremidades del lado BC tirense las dos lineas BD, CD, que concurran en el punto D: digo, que estas dos lineas BD, CD juntas, son menores, que los dos lados BA, y CA juntos; pero el angulo BDC, que comprehenden las dichas lineas BD, DC, es mayor que el angulo BAC comprehendido de las lineas AB, y AC: alarguese la linea BD hasta el punto E. En el (a) 20. Prop. triangulo BAE los dos lados BA, y AE juntos (a) son mayores que el lado BE, luego si se añade la (b) axiom. 4. parte comun EC, los lados BA, y AC, quedaràn (b) mayores que los lados BE, EC. Asimismo en el trianguloCDE los dos lados CE, ED juntos (a) son mayores que el lado CD, luego añadiendo la parte comun DB, (b) los dos lados CE, EB, quedaràn mayores, que los dos CD, y DB, luego si los dos CD, y DB son menores que los dos CE, y EB, y los CE, y EB se demostraron menores, que los BA, y AC, seràn los lados CD, y DB mucho menores que los lados BA, y AC.

(c) 16. P. 1. Demuestrase la segunda parte: el angulo BDC (c) es mayor que el angulo DEC, el externo q̃ su interno: por la misma razon el angulo DEC es

mayor que el angulo BAC, luego el angulo BDC es mucho mayor que el angulo BAC: luego si sobre vn lado,&c. que es lo que se avia de demostrar.

PROBLEMA 8. PROPOSICION 22.

De tres lineas rectas iguales à tres lineas rectas dadas, formar vn triangulo; pero es necessario que de las tres lineas dadas, qualesquiera dos juntas, sean mayores que la tercera.

Sean las tres lineas dadas A, B, C, de cuyas iguales se aya de formar vn triangulo. Tirese la linea DH infinita; y tomese (a) en ella la DE igual a la linea A, y la EF igual a la B, y la FG igual a la C; Desde el centro E con la distancia ED (b) describase el circulo EDI, y desde el centro F, con la distancia FG, describase el circulo FGI, y tirense las lineas rectas EI, FI: digo, que el triangulo EIF es de tres lineas iguales a las lineas dadas A, *B*, C. Porque la linea A es igual a la linea DE, y la linea EI (c) tambien es igual a la linea DE, luego (d) las lineas A, y *E*I son entresi iguales. Assimismo la linea C es igual a la linea FG por la construccion, y la linea FI (c) igual a la misma FG, luego (d) las lineas FI, y C son iguales entre si. La linea FE es igual a la linea *B* por la construccion, luego se formò el triangulo EIF de tres lineas rectas iguales a las tres lineas dadas A, *B*, C, que es lo que se avia de hazer.

Fig. 36.
(a) 3. r. 1.
(b) Post. 3.
(c) defin. 15.
(d) axiom. 1.

PRO-

PROBLEMA 9. PROPOSICION 23.

A vna linea recta dada, y a vn punto dado en ella, constituir vn angulo rectilineo igual a vn angulo rectilineo dado.

Fig. 37. Sea la linea dada AB, y el punto dado C; y el angulo dado DEF: se ha de formar al punto C. vn angulo, igual al angulo DEF. Tirese vna linea como DF, que junte las lineas del angulo dado, formando con ellas vn triangulo DEF, y al punto
(a) 22. P. 1. C sobre la linea AB describase (a) vn triangulo GCH de lados iguales a las tres lineas DE, EF, FD, de suerte que GC sea igual a la DE, y CH a
(b) 8. P. 1. la EF, y HG a la FD: luego (b) el angulo GCH será igual al angulo DEF: que es lo que se avia de hazer.

THEOREMA 15. PROPOSICION 24.

Si dos triangulos tienen dos lados iguales a dos lados, cada vno al suyo, y los angulos contenidos de iguales lados son desiguales, el triangulo que tuviere mayor angulo, tendrá tambien mayor base.

Fig. 38. Sean los triangulos ABC, DEF, que tengan los dos lados AB igual a DE, y AC a DF; pero el angulo EDF mayor que el angulo BAC: digo, que la base EF es mayor que la base BC. Al punto A
23. P. 1. hagase (a) el angulo BAG igual al angulo EDF, y

la

la linea (b) AG sea igual a la DF, ò a la AC, y tirense las lineas BG, y CG. Y por quanto en el triangulo ACG los lados AC, AG son iguales: luego (c) los angulos ACG, AGC son iguales: quitando pues, del angulo AGC el angulo AGB, y del otro nada, quedarà el angulo CGB menor que el angulo ACG; y añadiendo al angulo *ACG* el angulo *ACB*, el angulo GCB serà mucho mayor que el angulo CGB: luego (d) en el triangulo BCG al angulo mayor GC*B* se opone mayor lado *B*G, y al angulo menor *CGB* se opone menor lado *BC*. Pero el lado *BG* (e) es igual à la base EF: luego (f) la base EF es mayor que la base *BC*: que es lo que se avia de demostrar.

(b) 3. p. 1.
(c) 5. p. 1.
(d) 19. p. 1.
(e) 4. p. 1.
(f) axiom. 1.

THEOREMA 16. PROPOSICION 25.

Si dos triangulos tienen dos lados iguales à dos lados, cada vno al suyo, y las bases desiguales, el que tuviere mayor base, tendrà mayor el angulo à ella opuesto.

Sean los triangulos *ABC*, DEF, que tengan los dos lados, el *AB* igual al DE, y el *AC* al DF, pero la base EF sea mayor que la base *BC*: digo, que el angulo EDF opuesto a la mayor base, es mayor que el angulo *BAC* opuesto à la menor. Porque si el angulo D no es mayor que el angulo *A*, ò seràn iguales, ò el *A* serà mayor que el D; pero los angulos *D*, y *A* no pueden ser iguales, porque (a) las bases *BC*, y EF serian tambien iguales,

Fig. 39.
(a) 4. p. 1.

y se suponen desiguales; ni tampoco puede ser ma-
(b) 24. P.1. yor el angulo A, porque (b) la base BC seria ma-
yor que la base EF; pero se supone menor : luego
el angulo D opuesto a mayor base, es mayor que
el angulo A opuesto a la menor: luego si dos trian-
gulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 17. PROPOSICION 26.

*Si dos triangulos tienen dos angulos iguales a dos angu-
los cada vno al suyo, y vn lado igual à vn lado, ò sea el adja-
cente a los tales angulos, ò opuesto a vno dellos, tendràn igua-
les los demàs lados que se oponen a iguales angulos, y el ter-
cer angulo igual al tercer angulo.*

Fig. 40. Sean los triangulos ABC, DEF, que tengan los
angulos ABC igual al DEF, y ACB igual a DFE, y el
lado BC adjacente de dichos angulos, igual al lado
EF: digo, que tambien el lado AB serà igual al la-
do DE, y el AC igual al DF, y el angulo A igual
al angulo D. Porque si el lado BA no es igual al la-
do DE, vno dellos serà mayor: sea, pues, mayor el
(a) lado BA, y del mayor BA (a) cortese BG igual a DE,
3. P.1. y tirese la linea CG. En los triangulos GBC, DEF los
dos lados GB, BC del vno, son iguales a los dos DE,
EF del otro, y el angulo B igual al angulo E, lue-
(b) go (b) la base GC es igual a la base DF, y el angu-
4. P.1. (c) lo GCB igual al angulo DFE; pero el angulo ACB
axiom. 1. se daba igual al angulo DFE: luego (c) los dos
an-

angulos *ACB*, *GCB* ſon iguales entre ſi, la parte a ſu todo, (d)lo que no puede ſer:luego el lado *AB* no puede ſer mayor que el lado DE, luego igual: luego tambien (e) el lado *AC* es igual al lado DF, y el angulo *BAC* igual al angulo EDF. (d) *axiom. 9.* (e) *4. P. 1.*

Sean los lados *AB*, y DE iguales, que ſon opueſtos a iguales angulos C, y F: digo, que tambien los lados *BC*, y EF ſon iguales, &c. Porque ſi no lo ſon, ſerà vno dellos mayor: ſea pues el EF mayor que *BC*, y del mayor EF corteſe (a) EG igual à *BC*, y tireſe la recta DG: luego los triangulos *ABC*, DEG tendràn los dos lados *AB*, *BC* iguales a los dos lados *DE*, *EG*, y los angulos *B*, y *E* iguales, y ſerà (b) la baſe *AC* igual a la baſe *DG*, y el angulo BCA igual al angulo *EGD*; pero el angulo *EFD* tambien ſe daba igual al angulo BCA: luego (c) los dos angulos EGD, y *EFD* ſeràn iguales entre ſi, el externo al interno (f)lo que no puede ſer: luego el lado *EF* no puede ſer mayor que el lado BC: luego los lados BC, y EF ſon iguales entre ſi: luego (b) tambien el tercer lado *AC* es igual al tercero *DF*, y el angulo *A* al angulo *EDF*: luego ſi dos triangulos, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar. *Fig. 41.* (a) *3. P. 1.* (b) *4. P. 1.* (c) *Axiom. 1.* (f) *16. P. 1.*

THEOREMA 18. PROPOSICION 27.

Si vna linea recta cayendo ſobre otras dos rectas, haze los angulos alternos iguales, las tales dos rectas ſeràn paralelas entre ſi.

E Sean

Fig. 42. Sean las dos lineas rectas AB, CD ſobre las quales cayga la recta FE, haziẽdo los angulos alternos AFE, *DEF* iguales entre ſi: digo, que las lineas AB, CD ſon paralelas entre ſi. Porque ſi no lo ſon, podràn concurrir ò hàzia G, ò hàzia H: demos que concurran en el punto H, y ſerà *FHE* vn triangulo: (a) 16. P. 1. luego (a) el angulo externo *AFE* es mayor que el interno opueſto *DEF*, pero ſe davan iguales: luego las lineas AB, CD no pueden concurrir en el punto H. Por la miſma razon no pueden concurrir en el punto G: luego (b) ſon paralelas, que es (b) defin. 34. lo que ſe avia de demoſtrar.

THEOREMA 19. *PROPOSICION* 28.

Si vna linea recta cayendo ſobre otras dos rectas, haze el angulo externo igual al interno opueſto, y de la miſma parte, ò los internos, y de la miſma parte iguales a dos rectos, las tales dos rectas ſeràn paralelas entre ſi.

Sean las dos rectas *AB*, *CD*, ſobre las quales cayendo la recta GH, haga el angulo *CEH* externo Fig. 43. igual al angulo interno opueſto *AFE*: digo, que las lineas *AB*, *CD* ſon paralelas entre ſi. Porque el angulo *FED* es (a) igual al angulo CEH; tambien el angulo *AFE* ſe ſupone igual al angulo (a) 15. P. 1. CEH: luego (b) los dos angulos alternos *AFE*, y *FED* ſon iguales entre ſi: luego (c) las dos lineas (b) axiom. 1. *AB*, *CD* ſon paralelas entre ſi.

(c) 27. P. 1. Sean lo ſegundo los dos angulos internos AFE,

CEF

CEF iguales a dos rectos: digo, que las lineas AB, y CD son paralelas entre si. Porque los dos angulos AFE, y CEF se suponen iguales a dos rectos, tambien los dos angulos (d) CEF, y FED son iguales a dos rectos: luego los dos angulos (b) CEF FED juntos, son iguales a los dos angulos AFE, CEF juntos: luego si de entrambas partes quitamos el angulo CEF, quedaràn (f) los angulos alternos AFE, FED iguales entre si: luego (c) las lineas AB, y CD son paralelas: luego si vna linea recta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(d) 13. 1. 1. (b) axiom. 1. (f) axiom. 3. (c) 27. P. 1.

THEOREMA 20. PROPOSICION 29.

Si vna linea recta cae sobre dos lineas rectas paralelas; harà los angulos alternos iguales entre si, y el externo igual a su interno opuesto, y de la misma parte; y los dos internos, y de la misma parte iguales a dos rectos.

Sean las dos lineas AB, y CD paralelas, sobre las quales cayga la recta EH: digo lo primero, que los dos angulos alternos AEF, DFE son iguales entre si. Porque si no son iguales, sea si es possible el angulo AEF mayor que el angulo DFE: luego si a entrambos añadimos el angulo BEF (a) los dos angulos AEF, BEF juntos, seràn mayores que los dos DFE, y BEF; pero los dos AEF, BEF juntos (b) son iguales a dos rectos: luego los otros dos DFE y BEF juntos serà menores que dos rectos: luego (c) las lineas AB, CD concurrirà hàzia los puntos B, y D;

Fig. 44. (a) axiom. 4. (b) 13. P. 1. (c) ax. 13.

 pero

pero se suponen paralelas: luego el angulo AEF no puede ser mayor que el angulo DFE; ni tampoco menor, porque se siguiera el mismo absurdo: luego el angulo AEF es igual al angulo DFE.

Digo lo segundo, que el angulo externo CFH
(d) es igual al interno opuesto, y de la misma parte
15. p. 1 AEF. Porque el angulo CFH (d) es igual al angulo DFE, tambien el AEF està demostrado igual
(e) al angulo DFE: luego (e) los dos angulos CFH, y
axiom. 1. AEF son iguales entre si.

Digo lo tercero, que dos angulos internos, y de la misma parte, como los AEF, y CFE son iguales a dos rectos. Porque el angulo CFH està demostrado igual al angulo AEF: luego si a entrambos
(f) bos añadimos el angulo CFE (f) los dos angulos
axiom. 2. CFH, CFE juntos, seràn iguales a los dos AEF, CFE juntos; pero los dos CFH, CFE (b) juntos
(b)
13. p. 1. son iguales a dos rectos: luego los otros dos CFE, AEF juntos son iguales a dos rectos: luego si vna linea recta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 21. PROPOSICION 30.

Las lineas rectas, que son paralelas a vna misma linea recta, son tambien paralelas entre si.

Fig. 45. Sean las lineas rectas AB, CD paralelas a la recta EF: digo, que las lineas AB, y CD son tambien paralelas entre si. Porque si sobre ellas cae la recta

ta

ta GK (a) serà el angulo EHI externo igual al angulo AGH interno opuesto, y de la misma parte: tambien el angulo CIK externo (a) es igual al angulo EHI interno opuesto, y de la misma parte: luego (b) los dos angulos AGH, CIK son iguales entre si: luego (c) las dos lineas AB, CD son paralelas entre si, que es lo que se avia de demostrar. (a) 29. P. 1. (b) axiom. 1. (c) 28. P. 1.

PROBLEMA 10. *PROPOSICION* 31.

A vna linea recta dada tirar vna paralela por vn punto dado.

Sea la recta dada BC, y el punto dado A, por el qual se ha de tirar vna paralela a la linea BC. Juntese (a) el punto A, y la linea dada con la recta AD en qualquier angulo, y hagase (b) al punto A con la linea AD el angulo EAD igual al angulo ADC: digo, que la linea EA [alargada hàzia *F*.] es paralela a la linea BC. Porque los angulos alternos EAD, CDA son iguales entre si: luego (c) las lineas E*F*, BC son paralelas entre si: luego a vna linea, &c. que es lo que se avia de hazer. Fig. 46. (a) Post. 1. (b) 23. P. 1. (c) 27. P. 1.

THEOREMA 22. *PROPOSICION* 32.

De qualquier triangulo, prolongado vno de sus lados, el angulo externo es igual a los dos internos opuestos juntos, y los tres angulos internos de qualquier triangulo son iguales à dos rectos.

En

Fig. 47. I. En el triangulo ABC alarguese qualquier lado como BC hazia D: digo lo primero, que el angulo externo ACD es igual a los dos angulos internos
(a) opuestos A, y B juntos. Porque por el punto C
31. l. 1. (a) tirando la linea CE paralela al lado AB, serà
(b) (b) el angulo ACE igual a su alterno A, y el an-
29. l. 1. gulo ECD (b) igual a su interno opuesto, y de la
(c) misma parte B: luego (c) el entero ACD es igual
Axiom. 2. a los dos internos opuestos A, y B juntos.

Digo lo segundo, que los tres angulos internos del triangulo ABC son iguales a dos rectos. Porque por quanto el angulo ACD es igual a los dos angulos A, y B juntos, si a vna, y otra parte añadimos el angulo ACB, quedaràn (c) los dos angulos
(d) ACD, y ACB juntos iguales a los tres angulos in-
13. l. 1. ternos A, B, y ACB; pero los dos angulos (d) ACD, ACB juntos son iguales a dos rectos: luego
(e) (e) los tres angulos A, B, y ACB juntos son igua-
axiom. 1. les a dos rectos: luego de qualquier triangulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIOS.

1. Tres angulos juntos de qualquier triangulo, son iguales a otros tres angulos juntos de qualquier triangulo. Porque en qualquier triangulo los tres angulos son iguales a dos rectos.
2. En vn triangulo isosceles rectangulo, los angulos sobre la base son mitades de vn recto.
3. En vn triangulo equilatero cada angulo es las dos tercias partes de vn angulo recto.
4. Qualquier figura rectilinea contiene dos vezes tantos rectos menos

quatro, como es el numero de los lados de que consta la figura. Como la figura ABCDE, que consta de cinco lados, duplicando sus lados son 10 y quitando 4. quedan 6. tendrá pues la figura ABCDE seis rectos. Porque tomando qualquier punto F dentro de la figura, y tirando las rectas AF, BF, CF, DF, EF, quedará resuelta la figura en tantos triangulos como son los lados de la figura; pero cada triangulo tiene (f) dos rectos; luego todos los angulos son dos vezes tantos rectos, como el numero de los lados de que consta la figura, y los angulos (g) en el punto F son iguales a quatro rectos: luego los demas que tiene la figura propuesta son dos vezes tantos rectos menos quatro, &c.

Fig. 48.
(f) 32. P. 1.
(g) Cor. 15. P. 1.

THEOREMA 23. PROPOSICION 33.

Lineas rectas que juntan dos lineas rectas iguales, y paralelas, y de las mismas partes, son tambien iguales, y paralelas.

Sean iguales, y paralelas las lineas AB, CD, y juntenlas por los extremos las lineas AC, BD: digo, que tambien AC, y BD son iguales, y paralelas entre si. Porque tirando la diagonal AD en los triangulos BAD, CDA los lados BA, CD son iguales, y el AD comun, y (a) los angulos alternos BAD, CDA comprehendidos de los lados iguales son iguales entre si: luego (b) la base BD es igual a la base AC, y los angulos CAD, BDA son tambien iguales, aviendo pues dos lineas *AC*, *BD* sobre las quales cae la recta *AD*, y haze los angulos alternos *CAD*, *BDA* iguales entre si, seràn (c) paralelas: luego las lineas *AC*, *BD* son paralelas entre si, estàn demostradas tambien iguales: luego las lineas rectas que juntan, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 49.
(a) 29. P. 1.
(b) 4. P. 1.
(c) 27. P. 1.

THEO-

THEOREMA 24. PROPOSICION 34.

En los paralelogrammos los lados, y angulos opueſtos ſon iguales entre ſi, y la diagonal corta el paralelogrammo en dos partes iguales.

Fig. 49. Sea el paralelogrammo ABCD, en el qual tireſe la diagonal AD: digo, que los lados AB, CD ſon iguales entre ſi, y tambien los AC, BD, y el angulo B igual al angulo C, y el CAB igual al CDB, y el eſpacio BAD igual al eſpacio CDA. Porque en los triangulos ACD, y DBA los dos angulos alternos CAD, BDA (a) ſon iguales entre ſi, y tambien los alternos CDA, BAD: luego los dos triangulos ACD, y DBA tienen dos angulos iguales a dos angulos, cada vno al ſuyo, y el lado AD adjacente comun: luego (b) los demàs lados opueſtos a iguales angulos, ſon iguales entre ſi, y el tercer angulo igual al tercer angulo; conviene a ſaber el lado AB es igual al lado CD, y el lado AC igual al lado BD, y el angulo B igual al angulo C, y el angulo total CAB compueſto de los angulos CAD, BAD igual al angulo total BDC compueſto de los angulos BDA, CDA, y el triangulo ABD es igual al triangulo ACD: luego en los paralelogrammos, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

(a) 29. P. 1.

(b) 26. P. 1.

THEO-

THEOREMA 25. PROPOSICION 35.

Los paralelogrammos que tienen la base comun, y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales entre si.

Fig. 50.

Sean los paralelogrammos ACDE,FCDB, que tengan la base CD comun, y estèn contenidos entre las paralelas CD, y *AB*: digo, que son iguales entre si. Porque las lineas (a) AE, y CD son iguales entre si, tambien (a) la BF es igual a la CD: luego (b) la linea AE es igual a la linea *BF*: luego si a entrambas se añade la parte comun EF, quedarà (c) *AF* igual a la linea *EB*; pero tambien (a) la linea *AC* es igual a la linea ED, y (a) la *CF* igual a la *DB*: luego en los dos triangulos *CAF*, *DEB* los dos lados *CA*, *AF* son iguales a los dos lados DE, *EB*, y la base *CF* igual a la base *DB*, luego (d) el triangulo *CAF* es igual al triangulo *DEB*, y quitando de entrambas partes el triangulo comun *EGF*, quedarán [e] los trapezios *ACGE*, y *FGDB* iguales entre si, y añadiendo a entrambos el triangulo comun *CGD*, los paralelogrammos *ACDE*, y *FCDB* [f] quedarán iguales entre si: que es lo que se avia de demostrar.

(a) 34. P. 1. (b) axiom. 1. (c) axiom. 2. (d) 8. P. 1. (e) axiom. 3. (f) axiom. 2.

THEOREMA 26. PROPOSICION 36.

Los paralelogrammos que están sobre iguales bases, y entre vnas mismas paralelas son iguales entre si.

Fig. 51. Sean los paralelogrammos CAFE, DBGH sobre iguales bases CE, HD, y entre las paralelas AB, CD: digo, que son iguales entre si. Tirense las lineas CG, EB; y porque la linea CE es igual (a) 34. P. I. a la linea HD, y la GB (a) igual a su lado opuesto HD, luego las lineas CE, y GB (b) son iguales en- (b) axiom. I. tre si, y son tambien paralelas por la suposicion: (c) 33 P. I. luego las lineas CG, y EB (c) son tambien iguales, y paralelas: luego (d) CGBE es vn paralelogram- (d) defin. 35. mo, y tiene la base CE comun con el paralelo- (e) 35. P. I. grammo CAFE: luego (e) los paralelogrammos CGBE, y CAFE son iguales entre si. Por la misma razon los paralelogrammos CGBE, y DBGH, que tienen la misma base GB comun, y estàn entre las mismas paralelas, son iguales entre si: luego (b) los dos paralelogrammos CAFE, y DBGH por ser iguales a vn tercero, son iguales entre si: luego los paralelogrammos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 27. PROPOSICION 37.

Los triangulos que tienen vna misma base, y estàn constituidos entre vnas mismas paralelas, son iguales entre si.

Fig. 52. Sean los triangulos ACD, BCD, que tengan vna misma base CD, y estèn entre las paralelas AB, y CD: digo, que son iguales entre si. Porque (a) 31. P. I. si al lado CA (a) se tira la paralela DE, y al CB la DF, los paralelogrammos CE, y CF sobre vna mis-

misma base CD, y entre vnas mismas paralelas (b) serán iguales entre si, pero los triangulos ACD, y BCD son mitades (c) de los paralelogramos iguales CE, CF: luego (d) tambien los triangulos ACD, BCD son iguales entre si: luego los triangulos, &c. que es lo que se avia de demostrar. (b) 35. P. 1. (c) 34. P. 1. (d) axiom. 7.

THEOREMA 28. PROPOSICION 38.

Los triangulos que tienen iguales bases, y estàn constituidos entre vnas mismas paralelas, son iguales entre si. Fig. 53.

Sean los triangulos ACD, BFE, que tengan las bases CD, EF iguales, y estén constituidos entre las paralelas AB, CE: digo, que son iguales entre si. Porque si al lado AC (a) se tira la paralela DG, y al EB la FH, los paralelogrammos CG, y EH (b) serán iguales entre si; pero los triangulos ACD, y BFE (c) son mitades destos paralelogrammos iguales: luego (d) tambien los dos triangulos *ACD*, *BFE* son iguales entre si, que es lo que se avia de demostrar. (a) 31. P. 1. (b) 36. P. 1. (c) 34. P. 1. (d) axiom. 7.

THEOREMA 29. PROPOSICION 39.

Los triangulos iguales constituidos sobre vna misma base, y hàzia la misma parte, estàn tambien entre vnas mismas paralelas.

Fig. 54. Sean los triangulos ABC, DBC iguales entre ſi, conſtituidos ſobre vna miſma baſe BC, y hàzia la miſma parte; tireſe la linea AD por ſus vertices: digo, que la linea AD es paralela con la BC. Porque ſi la linea AD no es paralela con la BC, tireſe
(a) 31. P. 1. ſi es poſsible (a) por el punto A otra paralela a la baſe BC, la qual caìrà, ò mas abaxo, ò mas arriba, como vna de las lineas AE; alargueſe el lado BD haſta el punto F, y tirenſe las lineas GC, FC: luego ſi la paralela AE cae debaxo de la linea AD los
(b) 37. P. 1. dos triangulos (b) BAC, BGC que tienen vna miſma baſe BC, y eſtàn entre vnas miſmas paralelas, ſeràn iguales entre ſi; pero el triangulo BDC
(c) axiom. 1. ſe daba tambien igual al triangulo BAC: luego (c)
(d) axiom. 9. los dos triangulos BGC, BDC ſeràn iguales entre ſi, la parte a ſu todo, lo (d) que no puede ſer: luego tampoco la linea AGE puede ſer paralela con la BC. Cayga, pues, la paralela mas arriba de la linea AD ſi es poſsible: luego el triangulo BFC ſerà igual (b) al triangulo BAC; pero el triangulo BDC ſe daba tambien igual al BAC: luego (c) los dos triangulos BDC, BFC ſon iguales entre ſi, la parte a ſu todo, lo (d) que no puede ſer: luego tampoco la linea AFE puede ſer paralela con la BC: luego la AD que paſſa por los vertices es paralela con la BC: luego los triangulos iguales, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

THEO-

THEOREMA 30. PROPOSICION 40.

Los triangulos iguales conſtituidos ſobre iguales baſes, y hàzia la miſma parte, eſtàn tambien entre vnas miſmas paralelas.

Sean los triangulos ABC, DEF iguales entre ſi, conſtituidos ſobre las baſes BC, EF iguales: digo, que la linea AD que paſſa por ſus vertices es paralela a la BF. Porque ſi la AD no es paralela a la linea BF, tireſe (a) a la *BF* por el punto A otra paralela, ſi es poſsible, la qual cairà, ò mas arriba, como la AG, ò mas abaxo, como la AH; alargueſe el lado FD haſta el punto G, y tirenſe las lineas GE, HF: luego ſi la AH es paralela a la *BF*, los triangulos EHF, *BAC* (b) ſeràn iguales entre ſi; pero el triangulo DEF tambien era igual al triangulo *BAC*: luego (c) los dos triangulos EHF, DEF ſeràn iguales entre ſi, la parte a ſu todo, lo (d) que que no puede ſer: luego la linea AH no puede ſer paralela a la *BF*. Fig. 55. (a) 31. P. 1. (b) 38. P. 1. (c) axiom. 1. (d) axiom. 9.

Si la AG ſe dize, que es paralela a la BF (b) ſerà el triangulo EGF igual al triangulo *BAC*; pero el triangulo EDF tambien era igual al triangulo *BAC*: luego los dos triangulos EGF, y EDF (c) ſeràn iguales entre ſi, el todo a ſu parte, lo (d) que no puede ſer: luego la AG no puede ſer paralela a la *BF*: luego la paralela a la *BF* es la miſma linea AD,

AD, que paſſa por los vertices: luego los triangulos iguales,&c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

THEOREMA 31. *PROPOSICION* 41.

Si vn paralelogrammo tiene la miſma baſe que vn triangulo, y eſtà entre las miſmas paralelas, el paralelogrammo ſerà duplo del triangulo.

Fig. 56. Sea el paralelogrammo *ACDE*, y el triangulo *CBD*, que tengan la baſe *CD* comun, y eſtèn entre las paralelas *AB*, *CD*: digo, que el paralelogrammo *CE* es duplo del triangulo *CBD*. Porque tirando la diagonal AD, el triangulo *CAD* (a) es la mitad del paralelogrammo *CE*; pero el triangulo *CBD* (b) es igual al triangulo *CAD*: luego (c) el triangulo *CBD* es tambien mitad del paralelogrammo *CE*: luego el paralelogrammo *CE* es duplo del triangulo *CBD*, que es lo que ſe avia de demoſtrar.

(a) 34. P. 1. (b) 37. P. 1. (c) axiom 7.

PROBLEMA 11. *PROPOSICION* 42.

Conſtituir vn paralelogrammo igual a vn triangulo dado, en vn angulo rectilineo dado.

Fig. 57. Sea el triangulo dado *ABC*, y el angulo rectilineo dado D, ſe ha de hazer vn paralelogrammo igual al triangulo *ABC*, y que tenga vn angulo igual al angulo D. Partaſe (a) la baſe *BC* por medio en el punto E, tireſe la linea AE, y al punto E con

(a) 10. P. 1.

con la linea *CE* hagase (b) el angulo *CEF* igual al angulo D, y por el punto A a la base *BC* tirese (c) la paralela AG, y a la EF por el punto *C* otra paralela *CG*: digo, que el paralelogrammo *CF* es igual al triangulo A*BC* en el angulo *CEF* igual al angulo D. Porque los triangulos ABE, AE*C* sobre iguales bases, y entre las mismas paralelas (d) son iguales entre si: luego el triangulo total ABC es duplo del triangulo AE*C*; pero el paralelogrammo CF (e) es duplo del mismo triangulo AEC: luego (f) el paralelogrammo CF es igual al triangulo ABC, tambien tiene el angulo CEF igual al angulo D dado: luego se ha costituido, &c. que es lo que se avia de hazer.

(b) 23. P. 1. (c) 31. P. 1. (d) 38. P. 1. (e) 41. P. 1. (f) axiom. 6.

THEOREMA 32. PROPOSICION 43.

De todo paralelogrammo los complementos de los paralelogrammos circa diametrum son iguales entre si.

En el paralelogrammo AB CD estén los paralelogrammos EH, FI en torno del diametro AC: digo, que GB, HF sus complementos son iguales entre si. Porque (a) los triangulos ABC, ADC son iguales entre si, y tambiē los triangulos AGH, AGE iguales entre si: luego quitando de entrambas partes los dos triangulos AGH, AGE, los trapezios HGCD, y EGCB (b) quedarā iguales entre si; pero los triangulos GFC, GIC (a) tābien son iguales entre si: luego (b) qui-

Fig. 58. (a) 34. P. 1. (b) axiom. 3.

quitandolos de entrambas partes, los complementos GB, y HF quedaràn iguales entre si, que es lo que se avia de demostrar.

PROBLEMA 12. PROPOSICION 44.

Sobre vna linea recta dada constituir vn paralelogrammo
Fig. 59. *igual a vn triangulo dado, en vn angulo rectilineo dado.*

Sea la linea recta dada A sobre la qual se ha de constituir vn paralelogrammo igual al triangulo B dado, en vn angulo igual al angulo C tambien
(a) dado. En el angulo DGF igual al angulo C haga-
42. P. 1. (b) se (a) el paralelogrammo DF igual al triangulo
3. P. 1. B; alarguese el lado DG, y cortese (b) GH igual
(c) a la linea A dada: por el punto H (c) tirese la HK
31. P. 1. paralela al lado FG, alarguese la linea EF hasta que concurra con la linea HK, tirese el diametro KG hàzia M, y alarguese la ED hasta que concurra con el diametro KG en el punto M, y por èl tirese a la linea DH la paralela MI; alarguese la li-
(d) nea FG hasta que corte la linea MI en el punto L:
43. P. 1. digo, que LH es el paralelogrammo que se pide. Porque en el paralelogrammo EKIM (d)
(e) los complementos DF, LH son iguales entre si; pe-
axiom. 1. ro el paralelogrammo DF se hizo igual al triangulo B dado: luego (e) tambien el paralelogrammo
(f) LH es igual al triangulo B; tambien tiene el lado
15. P. 1. GH igual a la linea A, y el angulo LGH (f) igual al

an-

angulo *DGF*, ò al angulo C dado: luego se ha constituido, &c. que es lo que se avia de hazer.

PROBLEMA 13. PROPOSICION 45.

Sobre vna linea recta dada constituir vn paralelogrammo igual a vna figura rectilinea dada en vn angulo rectilineo dado.

Sea la recta dada EF, la figura rectilinea dada AB, y el angulo rectilineo dado D, se ha de hazer vn paralelogrammo igual al rectilineo AB en vn angulo igual al angulo D, y sobre la linea EF. Resuelvase el rectilineo dado en los triangulos A, y B, y sobre la linea EF hagase (a) el paralelogrammo FH igual al triangulo A en el angulo EFG igual al angulo D. Assimismo sobre la linea HG hagase el paralelogrammo GK igual al triangulo B en el angulo HGI igual al angulo D: digo, que estos dos paralelogrammos forman vn paralelogrammo EFKI igual al rectilineo dado AB, que està constituido sobre la linea EF dada en el angulo EFI igual al angulo D dado. Porque los angulos EFG, HGI se han hecho iguales al angulo D: luego (b) tambien son iguales entre si; y si a entrambos se añade el angulo HGF, los dos angulos EFG, HGF juntos (c) quedaràn iguales a los dos HGI, HGF juntos; pero (d) los angulos EFG, HGF son iguales a dos rectos: luego tambien los dos HGI, HGF seràn iguales a dos rectos:

Fig. 60.

(a) 44. P. 1.

(b) axiom. 1.

(c) axiom. 2.

(d) 29. P. 1.

(e) 14. P. 1. luego (e) las lineas FG, GI componen vna linea recta. Assimismo se demuestra, que la linea EK es vna recta; pero la linea FG era paralela a la linea EH por la construccion: luego toda la linea FI es paralela á toda la linea EK: tambien la linea EF (f) 30. P. 1. (f) es paralela a la linea KI: luego EFKI es vn paralelogrammo igual al rectilineo AB dado en el angulo EFG igual al angulo D dado: luego sobre vna linea recta dada se ha constituido, &c. que es lo que se avia de hazer.

PROBLEMA 14. *PROPOSICION* 46.

Fig. 61. *Descrivir vn quadrado de vna recta dada.*

Sea la recta dada AB, de la qual se ha de describir vn quadrado. Del punto A tirese (a) la linea
(a) 11. P. 1. perpendicular AD, y cortese (b) AD igual a la
(b) 3. P. 1. AB, del punto D tirese (c) la DC paralela a la AB,
(c) 31. P. 1. y del punto B la BC paralela a la AD: digo, que el
(d) 34. P. 1. paralelogrammo ABCD es vn quadrado. Porque las lineas AB, DC (d) son iguales entre si, y tambien las AD, BC entre si, pero la linea AD se hizo
(e) igual a la linea AB: luego (e) las quatro lineas son
axiom. 1. iguales entre si; tambien el angulo A se hizo recto: luego (d) el angulo C opuesto es recto, y el angu-
(f) lo B con el A cumple (f) dos rectos: luego el angu-
29. P. 1. lo B es recto, y su opuesto D tambien recto: luego
(g) defin. 29. (g) el paralelogrammo ABCD es quadrado: luego

go se ha descrito, &c. que es lo que se avia de hazer.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que si dos lineas son iguales, tambien sus quadrados serán iguales; y si dos quadrados son iguales, sus lados tambien seràn iguales.

THEOREMA 33. PROPOSICION 47.

En los triangulos rectangulos; el quadrado que se describe del lado opuesto al angulo recto es igual a los dos quadrados juntos, què se describen de los lados, que comprehenden el angulo recto.

Sea vn triangulo rectangulo ABC, y el angulo A recto: Digo, que el quadrado BD, que se describe del lado *BC* opuesto al angulo recto; es igual a los dos quadrados *BG*, y CI juntos, que se describen de los lados *BA*, y *CA*. Tirese (a) por el punto A la linea *A*K paralela al lado *BE*, que corte la linea *ED* en el punto K, y la *BC* en L, tirense las lineas FC, *AE*, *BH*, *AD*: y por ser los angulos *BAC* [por la suposicion] y C*A*I [en el quadrado] rectos, las lineas *BA*, *IA* (b) componen vna linea recta. Assimismo GA, y *AC* componen vna recta: y porque los angulos *FBA*, *CBE* en los quadrados son iguales entre si, si a cada parte se añade el angulo *ABC* comun (c) el angulo total *FBC*, quedarà igual al angulo *ABE*: Aviendo pues dos

Fig. 61.
(a) 31. p. 1.
(b) 14. p. 1.
(c) axiom. 2.

dos triangulos FBC, ABE, q̃ tienen dos lados iguales a dos lados cada vno al suyo, conviene a saber los lados FB, BC del vno (d) iguales a los lados AB, BC del otro, y los angulos FBC, ABE tambien iguales: luego (e) la base CF es igual a la base AE, y el triangulo FBC igual al triangulo ABE; pero el triangulo FBC (f) es la mitad del quadrado BG, y el triangulo ABE es la mitad del paralelogrammo EL, por tener vna misma base, y estar entre vnas mismas paralelas: luego (g) el quadrado BG, es igual al paralelogrammo EL, por ser duplos de iguales triangulos. Assimismo se demuestra, que el quadrado CI es igual al paralelogrammo DL. Porque (d) los angulos rectos BCD, HCA son iguales entre si: luego (c) añadiendo a entrambos el angulo ACB comun, el angulo total ACD, quedarà igual al angulo HCB: aviendo pues dos triangulos ACD, HCB, que tienen dos lados iguales a dos lados cada vno al suyo, conviene a saber (d) los lados AC, CD del vno iguales a los lados HC, CB del otro, y los angulos ACD, HCB comprehendidos de dichos lados, iguales: luego (e) la base AD es igual a la base HB, y el triangulo ACD igual al triangulo HCB; pero (f) el triangulo ACD es la mitad del paralelogrammo DL, y el triangulo HCB es la mitad del quadrado CI, teniendo vnas mismas bases, y estando entre vnas mismas paralelas: luego (g) el quadrado CI es igual al paralelogrammo DL: luego

(d) *defin.29.*
(e) 4. p.1.
(f) 41. p.1.
(g) *axiom.6.*
(c) *axiom.2.*

go (h) el quadrado *BD* es igual a los dos quadrados BG, CI juntos: luego en los triangulos rectangulos,&c. que es lo que se avia de demostrar. (h) *Axiom. 2.*

THEOREMA 34. PROPOSICION 48.

Si el quadrado que se describe de vn lado de vn triangulo, es igual a los quadrados juntos de los otros dos lados, el angulo contenido de dichos lados del triangulo serà recto.

En el triangulo *ABC* el quadrado del lado *AC* sea igual a los dos quadrados de los lados *AB*, y *BC*: digo, que el angulo *ABC* es recto. Al punto *B* levantese (a) la perpendicular *BD* igual a la *AB*, y tirese la linea DC: luego (b) los quadrados de las lineas *AB*, y *BC* seràn iguales a los quadrados de las lineas *DB*, y *BC*; pero el quadrado de la linea *AC*, es igual a los dos quadrados juntos de las lineas *AB*, y *BC* por la suposicion: luego (c) tambien es igual a los dos quadrados de las lineas D*B*, y *BC*; pero el quadrado (d) de la linea D*C* es igual a los quadrados de las lineas *DB*, y *BC*: luego (c) los quadrados de *AC*, y de *DC* son iguales entre si: luego (f) las rectas *AC*, y *DC* son iguales. Teniendo pues el triangulo ABC dos lados A*B*, *BC* iguales a dos lados *DB*, *BC* del triangulo *DBC*, y la base AC igual a la base DC, los angulos opuestos a las bases, que son *ABC*, y *DBC* (g) son iguales entre si; pero el angulo *DBC* es recto por la construccion: luego (c) tambien el angulo ABC es recto: luego,&c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 63. (a) *11. P. 1.* (b) *46. P. 1.* (c) *Ax. 1.* (d) *47. P. 1.* (f) *46. P. 1.* (g) *8. P. 1.*

LI-

LIBRO SEGVNDO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES.

DEFINICIONES.

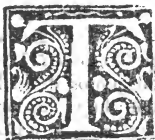
1. Odo paralelogrammo rectangulo se dize estar contenido de dos lineas rectas, que comprehenden el angulo recto.

Fig. 1. *El paralelogrammo ABCD se dize, que està contenido de las lineas AB y BC, ò de las AD, y DC, porque determinadas estas dos lineas, està determinada la magnitud del paralelogrammo, porque en èl las lineas opuestas son iguales.*

Quando en este libro, y en los siguientes se dixere rectangulo, se debe entender por esta palabra vn paralelogrammo rectangulo, cuyos quatro angulos son rectos, de quien solamente ay dos especies, que son el quadrado, y el quadrilongo. Si se determina por numeros el valor de las dos lineas, y se multiplica el valor de la vna por el de la otra, el producto serà el valor de todo el rectangulo.

2. De todo paralelogrammo, qualquiera de los que corta el diametro con los dos complementos, se llama gnomon.

Fig. 2. *En el paralelogrammo ABCD sea rectangulo, ò no lo sea, dividido con el diame-*

metro BD, y las dos paralelas EF, HI en el punto G, el paralelogrammo HF con los dos complementos AG, y GC se llama gnomon, como lo designa el circulo que passa por estos paralelogrammos.

THEOREMA 1. PROPOSICION 1.

Si ay dos lineas rectas, y vna dellas se corta en qualesquiera partes, el rectangulo contenido de las dos lineas rectas, es igual a los rectangulos contenidos de la entera, y de cada vna de las partes de la cortada. Fig. 3.

Sean las dos lineas rectas A, y BC, y cortese la BC como quiera en los puntos D, y E: digo, que el rectãgulo contenido de la A, y de la BC es igual a los rectangulos contenidos de la A, y de la BD, y de la A, y de la DE, y de la A, y de la EC. Al punto (a) B levantese la perpendicular BG igual (b) a la linea A. y cumplase (c) el rectangulo BCFG, y por los puntos D, y E tirense las paralelas DH, EI a la linea BG: luego (d) las lineas BG, DH, EI, CF son iguales entre si, pero la BG es igual a la linea A: luego tambien las lineas DH, EI, CF son iguales a la linea A: luego (e) el rectangulo BH està contenido de la BG, ò de la A su igual, y de la BD, y el rectangulo DI està contenido de la DH igual a la A, y de la DE; y el rectangulo EF, està contenido de la EI igual a la A, y de la AC; pero los rectangulos BH, DI, EF juntos son iguales (f) al rectangulo BF, las partes juntas a su todo: luego, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 11. P. 1.
(b) 3. P. 1.
(c) 31. P. 1.
(d) 34. P. 1.
(e) 1. defin. 2
(f) ax. 19.

NOTA.

Todos los Theoremas deste libro segundo se pueden demostrar por nu-

numeros, y assi despues de la demonstracion lineal añadirémos brevemente la de los numeros, que podrà servir a los principiantes de explicacion de las que vsan ordinariamente los Comentadores de Euclides.

Sean pues dos numeros A 5. y BC 20. y partase el BC como quiera en BD 4. DE 6 EC 10. digo, que el producto de A 5. con BC 20. que es BF 100. es igual a los productos de A 5. con BD 4. que es 20. y de A 5. con DE 6. que es 30. y de A 5. con EC 10. que es 50. que juntos componen 100.

THEOREMA 2. PROPOSICION. 2.

Si vna linea recta se corta como quiera, los rectangulos contenidos de la toda, y de cada vna de sus partes son iguales al quadrado de la toda.

Fig. 4. Cortese la linea recta AB como quiera en el punto C: digo, que el rectangulo contenido de la AB, y BC, con el rectangulo contenido de la AB, y AC es igual al quadrado de la AB. Sobre la linea AB describase (a) el quadrado AD, y tirese (b) la CF paralela a la BD, y serà (c) la CF igual a la BD, ò a la AB: luego (d) el rectangulo BF està contenido de la BD, ò de la AB su igual, y de la BC, y el rectangulo AF està contenido de la AE, ò de la AB su igual, y de la AC; pero los rectangulos BF, y AF juntos (e) son iguales al quadrado AD, las partes juntas a su todo: luego si vna linea recta se corta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 46. P. 1. (b) 31. P. 1. (c) 34. P. 1. (d) 1. defin. 2 (e) ax. 19.

En numeros. Sea el numero AB 10. que se parta como quiera en AC 3. y CB 7. el quadrado del AB, que es 100. es igual a los productos de AB 10. con AC 3. que es 30, y de AB 10. con CB 7. que es 70.

THEO-

THEOREMA 3. PROPOSICION 3.

Si vna linea recta se corta como quiera, el rectangulo contenido de la toda, y de vna de sus partes, es igual al rectangulo contenido de las partes, y al quadrado de la parte tomada para formar el rectangulo.

Cortese la linea recta *AB* como quiera en el punto C: digo, que el rectangulo contenido de la *AB*, y de vna de sus partes, como la *AC*; esto es el rectangulo AF, es igual al rectangulo contenido de la *AC*, y *CB*, y al quadrado de la *AC*: sobre la linea *AC* (a) describase el quadrado *AD*, tirese (b) la *BF* paralela a la *CD*, alarguese la ED hasta el punto F: y porque (c) la linea *AE* es igual a la linea *AC*: luego el rectangulo *AF* (d) està contenido de la *AB*, y *AC*. Assimismo porque la linea *CD* es igual a la *AC*, el rectangulo CF està contenido de la *AC*, y *CB*, que son los segmentos, ò partes de la linea *AB*; pero (e) el rectangulo *AF* es igual al quadrado *AD* junto con el rectangulo CF, el todo a sus partes: luego si vna linea recta se corta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 5.

(a) 46. p. 1.
(b) 31. p. 1.
(c) 29. def. 1.
(d) 1. defi. 2.
(e) ax. 19.

En numeros. Sea el numero AB 10. partido en AC 4. y CB 6: digo, que el producto de AB con AC, que es 40. es igual al quadrado de AC, que es 16. y al producto de AC con CB, que es 24.

THEOREMA 4. PROPOSICION 4.

Si vna linea recta se corta como quiera, el quadrado de

 la

la toda, es igual a los quadrados de sus partes, y a dos vezes el rectangulo contenido de sus partes.
Fig. 6.

Cortese la linea recta AB como quiera en el punto C: digo, que el quadrado de la linea AB es igual a los quadrados de la AC, y de CB, y a dos rectangulos contenidos de la AC con la CB. Sobre la linea AB (a) describase el quadrado AD, tirese el diametro EB, y por el punto C tirese (b) la linea CF paralela a la AE, que corte el diametro en el punto G, y por èl tirese la linea HI paralela a la AB, y quedarà diuidido el quadrado AD en quatro paralelogrammos; y porq̃ en el triangulo ABE los lados AB, AE son iguales entre si, luego (c) los angulos sobre la base AEB, ABE son tambien iguales; pero el angulo EAB es recto: luego (d) los otros dos AEB, ABE son semirectos. Tambien en el triangulo EHG el angulo EHG es recto, el externo igual (e) a su interno, y opuesto EAB, y el angulo HEG està demostrado semirecto: luego el angulo HGE (d) es semirecto: luego (f) los lados HE, HG opuestos a angulos iguales, son iguales entre si; pero (g) los lados HE, HG son iguales a sus opuestos FG, EF: luego los quatro lados HE, EF, FG, GH son entre si iguales, y (e) todos quatro angulos rectos: luego el paralelogrammo HF es quadrado. De la misma suerte se demuestra, que el paralelogrammo CI es quadrado: tambien la linea HG (g) es igual a la linea AC: luego los qua-

(a) 46. p. 1.
(b) 31. p. 1.
(c) 5. p. 1.
(d) 32. p. 1.
(e) 29. p. 1.
(f) 6. p. 1.
(g) 34. p. 1.

dra-

drados HF, y CI son los quadrados que se forman de las partes AC, y CB. Demàs desto, el rectangulo AG està contenido de la linea AC, y de la CG igual a la CB, y el rectangulo GD està comprehẽdido de la linea FG igual a la HG, ò AC, y de la GI igual a la CB: luego los dos rectangulos AG, y GD estàn formados de las dos partes AC, y CB; pero(h) el quadrado AD es igual a los dos quadrados HF, y CI, junto con los dos rectangulos AG, y GD: luego si vna linea se corta, &c. que es lo que se avia de demostrar. (h) *ax.* 19.

En numeros. Sea el numero AB 10. partido en AC 3. y CB 7: digo, que el quadrado de AB, que es 100. es igual a los quadrados de AC, y de CB, que son 9. y 49. y a los dos productos de AC con CB, que es 21. y 21.

COROLARIOS.

1. De aqui se sigue, que en los quadrados los paralelogrammos por quienes passa el diametro son quadrados, por que està demostrado, que los paralelogramos HF, y CI son quadrados.
2. Siguese lo segundo, que la diagonal en vn quadrado corta los angulos igualmente en dos mitades, porque està demostrado, que el angulo AEB es semirecto.
3. Siguese lo tercero, que si vna linea recta fuere dupla de otra recta, el quadrado de la dupla es quadruplo del quadrado de la que fuere su mitad. Porque si la linea AB estuviere cortada por medio en el punto C, todos los quatro paralelogrammos seràn quadrados, y ellos juntos son iguales al quadrado de la linea AB.

THEOREMA 5. PROPOSICION 5.

Si vna linea recta se corta en partes iguales, y en desiguales, el rectãgulo contenido de las partes desiguales de la toda

junto con el quadrado de la parte intermedia, es igual al quadrado que se forma de la mitad.

Fig. 7. Cortese la linea recta AB en partes iguales en el punto C, y en desiguales en el punto D: digo, que el rectangulo contenido de la AD, y de la DB junto con el quadrado de la parte intermedia CD, es igual al quadrado que se forma de la mitad CB. Sobre la mitad CB (a) describase el quadrado CF, tirese la diagonal EB, y por el punto D (b) tirese la DG paralela a la BF, que corte la EB en el punto H, y por èl (b) tirese la IK paralela a la CB, y por A la AL paralela a la CE, y alarguese la IK hasta L; y porque CF es quadrado (c) los paralelogrammos DI, KG, por quienes passa la diagonal, seràn tambien quadrados; pero la linea KH (d) es igual a la CD: luego el quadrado KG, es el quadrado de la intermedia CD; y porque la linea DH es (e) igual a la DB: luego AH serà el rectangulo contenido de las lineas AD, y DB; pero los complementos (f) CH, HF son iguales entre si: luego si a entrambos se añade el quadrado DI, el rectangulo CI quedarà igual al rectangulo DF; tambien (g) el rectangulo AK es igual al rectangulo CI, por tener las bases AC, y CB iguales: luego (h) el rectangulo AK es igual al rectangulo DF; y añadiendo a entrambas partes el rectangulo CH, el rectangulo AH quedarà igual al gnomon MNO; y añadiendo tambien a entrambas partes

(a) 46. P. 1.
(b) 31. P. 1.
(c) 1. Cor. 4. P. 2.
(d) 34. P. 1.
(e) 29. def. 1.
(f) 43. P. 1.
(g) 36. P. 1.
(h) axiom. 1.

el

el quadrado KG, el rectangulo AH contenido de las partes desiguales, junto con el quadrado KG, formado de la parte intermedia, quedarà igual al quadrado CF, formado de la mitad : luego si vna linea recta se corta,&c. que es lo que se avia de demostrar.

En numeros. El numero AB 10. dividase en partes iguales AC 5. y CB 5. y en partes desiguales AD 7. DB 3: digo, que el producto de las partes desiguales AD con DB, que es 21. junto con el quadrado de la diferencia 2. entre las partes iguales, y desiguales [que es la semidiferencia de las partes desiguales] el qual es 4. es igual al quadrado de CB, que es 25.

THEOREMA 6. PROPOSICION 6.

Si vna linea recta se corta en dos partes iguales, y se le añade directamente alguna linea recta, el rectangulo contenido de la toda con la añadida, y de la añadida, junto con el quadrado que se forma de la mitad, es igual al quadrado que se forma de la mitad, y de la añadida como de vna.

Cortese la linea recta AB en dos partes iguales en el punto C, y añadasele directamente vna linea recta como BD: digo, que el rectangulo contenido de la AD, y de la BD, junto con el quadrado de la BC es igual al quadrado de la CD: sobre la linea CD (a) describase el quadrado CE, tirese la diagonal FD, y por el punto B (b) la BG paralela a la DE, cortando la diagonal en H, y por este punto (b) tirese la IHK paralela a la CD, y del punto A la AL paralela a la CK, que corte la I K prolongada

Fig. 8.

(a) 46. P. 1.

(b) 31. P. 1.

(c) gada en L. Por quanto las bases AC, CB son igua-
36.P.1. les (c) los rectangulos AK, CH son iguales entre
(d) si, tambien (d) el rectangulo HE es igual al rectan-
43 P.1. gulo CH, por ser complementos: luego (e) el rec-
(e) axiom.1. tangulo AK es igual al rectangulo HE; añadiendo pues a entrambas partes el rectangulo CI, el rectangulo AI quedarà igual al gnomon MNO; pero el rectangulo AI està contenido de la AD, y de la
(f) DI igual a la BD, porque (f) BI es quadrado: lue-
1. Cor. go el rectangulo de la AD, y de la BD es igual al
4.P.2. gnomon MNO: añadase tambien a entrambas partes el quadrado KG de la KH, ò de la CB su igual, y quedarà el rectangulo AI contenido de la AD, y de la BD junto con el quadrado de la CB mitad [que es la semidiferencia entre la toda con la añadida como vna, y entre la añadida] igual al quadrado CE, formado de la CD; esto es de la mitad, y de la añadida como de vna: luego si vna linea &c. que es lo que se avia de demostrar.

En numeros. El numero AB 10. dividase en partes iguales AC 5. CB 5. y añadasele el numero BD 2. digo, que el producto de AD 12. con BD 2, que es 24 junto con el quadrado de CB, que es 25. es igual al quadrado de CD 7. que es 49.

THEOREMA 7. PROPOSICION 7.

Si vna linea recta se corta como quiera, los dos quadrados juntos, conviene a saber el de la toda, y el de vna de sus partes, son iguales a dos vezes el rectangulo contenido de la toda, y de la dicha parte, y al quadrado de la otra parte.

Cor-

Cortese la linea recta AB como quiera en el pũto C: digo, que los quadrados de la AB, y del segmento[sea mayor,ò menor] *AC* son iguales al rectangulo dos vezes contenido de la *AB*, y de la *AC*, y al quadrado de la BC. Sobre la *AB* (a) describase el quadrado *AD*, tirese la diagonal *BE*, y por el punto C (b) la CF paralela a la BD, que corte la diagonal en el punto G, y por el (b) tirese la HI paralela a la *AB*: luego (c) *CI*,HF son quadrados: y porque las lineas GH, *AC* son iguales, HF serà el quadrado de la *AC*: y porque la linea *AB* es igual a la *AE*: luego el rectangulo *AF* està contenido de la linea *AB*, y de la *AC*. Assimismo,porque la linea ED es igual a la *AB*, y la EH a la HG, ò a la *AC*, el rectangulo DH està contenido de la *AB*, y de la *AC*; pero los dos rectangulos *AF*, y D*H* son iguales al gnomon KLM junto con el quadrado *HF*: luego añadiendo a entrambas partes el quadrado *CI*, los dos rectangulos *AF*, y *DH* con el quadrado *CI* quedaràn iguales al gnomon KLM junto con el quadrado *CI*, esto es al quadrado *AD* juntamente con el quadrado *HF*: luego si vna linea recta se corta,&c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 9.
(a) 46. P. 1.
(b) 31. P. 1.
(c) 1. Cor. 4. P. 2.

En numeros. Sea el numero AB 10. partido en AC 4. y CB 6. digo, que el quadrado de AB, que es 100. junto con el quadrado de CB,que es 36, es igual a dos productos de AB con CB, que son 120. y al quadrado de AC,que es 16.

THEO-

THEOREMA 8. PROPOSICION 8.

Si vna linea recta se corta como quiera, el rectangulo quatro vezes contenido de la toda, y de vna de sus partes, con el quadrado de la otra parte es igual al quadrado de la toda, y de la dicha parte primeramente tomada, como de vna.

Fig. 10. Cortese la linea recta AB como quiera en el punto C: digo, que el rectangulo quatro vezes contenido de la AB, y de la BC [ò sea la mayor parte, ó la menor] junto con el quadrado de la
(a) AC es igual al quadrado de la AB, y de la BC co-
3. P. 1. mo de vna. Alarguese la linea AB, y hagase (a)
(b) 46. P. 1. la BD igual a la BC, y sobre la AD como vna mis-
ma (b) describase el quadrado AE, tirese la dia-
(c) 31. P. 1. gonal FD, y por los puntos B, y C (c) tirense las BG, CI paralelas a la AF, y por los puntos H, y K, donde cortan la diagonal tirense las LM, OP pa-
(d) ralelas a la AD: luego (d) OI, NQ, BM, LG son
1. Cor. 4. P. 2. quadrados, porque passa por ellos la diagonal del
(e) quadrado AE; y porque la linea OK (e) es igual
34. P. 1. a la AC, OI serà el quadrado de la AC. Assimismo porque la linea NH es igual a la *CB*, NQ serà el quadrado de la *CB*; y porque las lineas *CB*, *BD* se hizieron iguales, el quadrado NQ serà igual al
(f) quadrado BM (f) luego las lineas BH, HQ son
46. P. 1. iguales por ser lados de iguales quadrados: luego los

los rectangulos AH, LQ estàn contenidos de la linea AB, y de la BC por ser la LH igual a la AB, y las BH, HQ iguales a la BC: de la misma suerte se demuestra que los dos rectangulos NG, HE està contenidos de la AB, y de la BC, porque las lineas NH, HM son iguales a la BC, y las ME, HG (f) iguales a la LH, ò a la AB; y porque el quadrado NQ està demostrado igual al quadrado BM, añadiendo a entrambas partes el rectangulo KG, el rectangulo NG serà igual a los BM, KG juntos: luego los cinco rectangulos AH, LQ, HE, BM, GK, que componen el gnomon RST son iguales a los quatro rectangulos contenidos de la AB, y de la BC; añadase a entrambas partes el quadrado OI: luego el gnomõ RST junto con el quadrado OI (esto es) el quadrado AE, es igual a los quatro rectangulos contenidos de la toda AB, y de la parte BC, junto con el quadrado de la otra parte AC: luego si vna linea recta se corta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(f) 46. p. 1.

En numeros. Sea el numero AB 10. que se parta en AC 4. y CB 6. digo, que el quadruplo producto de AB con CB, que es 240. junto con el quadrado de AC, que es 16. es igual al quadrado de AD, que es 256.

THEOREMA 9. PROPOSICION 9.

Si vna linea recta se corta en partes iguales, y en desiguales, los quadrados de las partes desiguales juntos son el du-

plo de los quadrados que se forman de la mitad, y de la parte intermedia.

Fig. 11. Cortese la linea recta AB en dos partes iguales en el punto C, y en dos desiguales en el punto D: digo, que los quadrados de las partes desiguales AD, y DB juntos son el duplo de los quadrados, que se forman de la mitad AC, y de la parte inter-
(a) media CD. Al punto C (a) levantese la perpen-
11. P. 1. dicular CE, y hagase (b) igual a la CA, ò a la CB;
(b) 3. P. 1. tirense las lineas AE, BE, y por el punto D tirese
(c) (c) la DF paralela a la CE, y por el punto F la FG
31. P. 1. paralela a la CD, y juntese la AF. Y porque en el triangulo ACE el lado CA es igual al lado CE
(d) (d) el angulo CAE es igual al angulo CEA, pero
5. P. 1. el angulo ACE es recto: luego (e) los otros dos
(e) 2. Cor. CAE, CEA son semirectos. Assimismo los dos
32. P. 1. angulos CEB, y CBE se demuestran semirectos: luego el angulo total AEB es vn recto; y porque en el triangulo FGE el angulo EGF es igual a su interno, y opuesto ECB, tambien serà recto, y el angulo GEF està demostrado semirecto: luego (e) el EFG es semirecto, y (f) las lineas EG, GF son
(f) 6. P. 1. iguales entre si. De la misma suerte se demuestra en el triangulo BDF, que los lados BD, DF son iguales entre si, porque el angulo BDF es recto, y el DBF semirecto. Y porque en el triangulo ACE
(g) el angulo C es recto: luego (g) el quadrado de la
47. P. 1. linea AE es igual a los dos quadrados de las AC,

y

y CE; pero (h) estos dos quadrados son iguales entre si: luego el quadrado de la AE es duplo del quadrado de la AC. De la misma suerte se demuestra, que el quadrado de la linea EF es duplo del quadrado de la linea FG; pero el lado FG es igual al lado CD: luego (h) el quadrado de la linea FG es igual al quadrado de la CD: y el quadrado de la EF es tambien duplo del quadrado de la CD: luego los dos quadrados de la AE, y de la EF son el duplo de los quadrados de la AC, y de la CD (g) pero el quadrado de la AF es igual a los dos quadrados de la AE, y de la EF: luego el quadrado de la AF es duplo de los dos quadrados de la AC, y de la CD: tambien el quadrado de la AF es igual a los dos quadrados (g) de la AD, y de la DF, ò de la DB su igual: luego los dos quadrados de la AD, y de la DB partes desiguales, son el duplo de los quadrados de la AC mitad, y de la CD parte intermedia: luego si vna linea recta se corta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(h) 46. p. 1.

(g) 47. p. 1.

En numeros. El numèro AB partase en partes iguales AC 5. CB 5 y en desiguales AD 7. y DB 3. digo, que el quadrado de la AD, que es 49. junto con el quadrado de la DB, que es 9. es duplo del quadrado AC 25. y de CD 4.

THEOREMA 10. PROPOSICION 10.

Si vna linea recta se corta en dos partes iguales, y se le añade directamente qualquiera otra linea recta, los dos quadrados, el que se forma de la toda con la añadida como de vna, y el de la añadida juntos, son el duplo de los dos quadrados juntos, que se forman el vno de la mitad, y el otro de la linea compuesta de la mitad, y de la añadida como de vna.

Fig. 12. Cortese la linea recta AB en dos partes iguales en el punto C, y añadasele directamente la linea BD: digo, que los dos quadrados el de la AD, y el de la BD juntos son el duplo de los dos quadrados que se forman, el vno de la mitad AC, y èl otro de la CD compuesta de la mitad CB, y de la añadida
(a) 11. P. 1. BD. Al punto C (a) levantese la perpendicular CE, y hagase igual a la AC, ò CB: tirense las lineas
(b) 31. P. 1. AE, EB, y por el punto E tirese (b) la EF paralela a la AD, y por el punto D la DF paralela a la CE, que corte la EF en el punto F, alarguese la EB hasta que corte la FD prolongada en el punto G, y tirese la recta AG. Y porque en el triangulo ACE los lados AC, CE son iguales entre si, luego
(c) 5. P. 1. (c) el angulo CAE es igual al angulo CEA, y el
(d) 2. Cor. 32. P. 1. angulo ACE es recto: luego los angulos CAE, CEA (d) son semirectos: de la misma suerte en el triangulo ECB los angulos CBE, BEC se demuestran

tran semirectos: luego el angulo total AEB es vn (e)
recto, y el angulo DBG (e) es igual a su vertical 15. P.1.
CBE: luego el angulo *DBG* es semirecto, y el (f)
BDG es igual (f) a su alterno ECD, que es rec- 29. P.1. (g)
to: luego el *BDG* tambien es recto, y el ter- 2. Cor.
cer angulo *DGB* (g) es semirecto en el trian- 32. P.1. (h)
gulo *BDG*: luego (h) el lado *DB* es igual al la- 6. P.1.
do DG, pero el angulo F es recto por ser igual (i)
(i) a su opuesto ECD en el paralelogrammo CF, y 34. P.1.
el angulo FGE està demostrado semirecto: luego
(g) el angulo FEG tambien es semirecto, y (h) el
lado EF es igual al lado FG: y porque la linea AC
es igual à la CE, el quadrado de la AC (k) serà (k)
igual al quadrado de la CE; pero el quadrado de 46. P.1. (l)
la AE es igual a los dos quadrados (l) de las *AC*, 47. P.1.
y *CE*: luego es duplo del quadrado de la *AC*. Assimismo, porque la linea EF es igual a la linea FG el quadrado de la *EF* serà igual al quadrado de la FG; pero el quadrado de la *EG* es igual a los dos quadrados de las *EF*, *FG*: luego es duplo del quadrado de la *EF*, ò de la *CD* su igual, luego los quadrados de la *AE*, y de la *EG* son duplos de los quadrados de la *AC*, y de la *CD*; pero (l) el quadrado de la *AG* es igual a los dos quadrados de la *AE*, y de la *EG*: luego serà duplo de los quadrados de la *AC*, y de la *CD*; tambien el quadrado de la *AG* (l) es igual a los dos quadrados de la *AD*, y de la *DG*, ò de la *DB* su igual: luego los dos quadrados el de

la

la AD, que es la toda con la añadida, y el de la *DB* la añadida son el duplo de los quadrados, que se forman de la *AC* mitad, y de la *CD* compuesta de la mitad, y de la añadida: luego si vna linea recta se corta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

En numeros. El numero AB 10. partase en partes iguales AC 5. CB 5. y al AB añadase el numero BD 9. Digo, que el quadrado de AD 19. junto con el quadrado del BD 9. que componen el quadrado 442. es el duplo de los quadrados de AC, y de CD, que componen 221.

PROBLEMA 1. *PROPOSICION* 11.

Cortar vna linea recta de tal suerte, que el rectangulo contenido de la toda, y vna de sus partes sea igual al quadrado, que se forma de la otra parte.

Fig. 13. Sea la linea recta dada AB, que se ha de cortar de suerte, que el rectangulo contenido de la toda, y de la menor parte sea igual al quadrado que se
(a) forma de la otra parte. Sobre la linea AB (a) des-
46. P. 1. cribase el quadrado *AC*, y cortese la linea *AD* ad-
(b) jacente a la dada (b) en dos partes iguales en el
10. P. 1. punto E, tirese la linea EB, y de la EA alargada
(c) cortese (c) la EF igual a la EB, y de la *AB* la *AG*
3. P. 1. igual a la *AF* [porque la *AB* es mayor que la *AF*: por quanto en el triangulo *EAB* los dos lados
(d) *EA*, *AB* (d) son mayores que la *EB*, ò que la *EF*
20. P. 1. su igual: luego quitando la comun *EA*, quedarà
(e) (e) la AB mayor que la AF:] digo, que la linea *AB*
axiom. 5. està cortada en el punto G de suerte, que el rectangulo contenido de la *AB*, y de la BG es igual al qua-
(f) drado de la *AG*. Por el punto G (f) tirese la HI
31. P. 1. paralela a la *FD*, y por el punto F la *FH* paralela

a la

à la *AB*: luego (g) el paralelogrammo *FG* es vn quadrado, porque todos los lados son iguales, y todos los angulos rectos. Y porque la linea recta *DA* està cortada en dos partes iguales en el punto *E*, y se le añade directamẽte la recta *AF*: luego (h) el rectangulo contenido de la DF, y de la *AF*, junto con el quadrado de la *EA* es igual al quadrado que se forma de la *EF*, ó de la *EB* su igual; pero el quadrado de la *EB* (i) es igual a los dos quadrados de la *EA*, y de la *AB*: luego (k) el rectangulo contenido de la *DF*, y de la *AF*, ò de la *FH* su igual [que es el rectangulo *FI*] junto con el quadrado de la *EA*, es igual a los dos quadrados de la *EA*, y de la *AB*: quitese de entrambas partes el quadrado de la *EA*, y quedaràn el rectangulo *FI*, y el quadrado de la *AB* iguales entre si: quitese tambien de entrambas partes el rectangulo *AI* comun, y quedaràn (l) el quadrado *FG*, y el rectangulo *GC* iguales entre si; pero el rectangulo *GC* està contenido de la *BC*, ò de la *AB* su igual, y de la *BG*, y el quadrado *FG* està formado de la *AG*: luego la linea, &c. que es lo que se avia de hazer.

(g) 34. P. 1.

(h) 6. P. 2.

(i) 47. P. 1.

(k) axiom. 1.

(l) axiom. 3.

Este problema no se puede executar en numeros, porque (m) el quadrado de la linea AB es quadruplo del quadrado de la linea EA: luego el quadrado de la EB, que vale los dos quadrados de la AB, y de la EA, es quintuplo del quadrado de la linea EA; pero los numeros no pueden exprimir vn quadrado quintuplo de otro quadrado: luego no se puede exprimir la raiz quadrada, que es la linea EB, ò su igual EF, para poder restar de la EF, la EA, y saber el residuo AF, ò AG. Sea AB 10, su quadrado 100. EA serà 5. su quadrado 25. el quadrado de la EB, ò de la EF su igual es 125. y la linea EF es raiz quadrada de 125. que no se puede exprimir en numeros.

(m) 4. P. 2.

THEO-

THEOREMA 11. PROPOSICION 12.

En los triangulos amblygonios el quadrado del lado opuesto al angulo obtuso es mayor que los quadrados de los lados que comprehenden el angulo obtuso, dos vezes el rectangulo contenido de vno de los lados que forman el angulo obtuso, sobre el qual prolongado cae la perpendicular, y de la linea tomada fuera entre la perpendicular, y el angulo obtuso.

Fig. 14. Sea el triangulo *ABC*, que tenga el angulo *ABC*
(a) obtuso, y desde el punto A (a) tirese la linea AD
12. P. 1. perpendicular sobre la *CB* prolongada: digo, que el quadrado de la *AC* es mayor que los quadrados de la *AB*, y de la *CB*, dos vezes el rectangulo contenido de la *CB*, y de la *BD*. Porque la linea recta
(b) *CD* està cortada como quiera en el punto *B*: luego
4. P. 2. (b) el quadrado de la *CD* es igual a los quadrados de la *CB*, y de la *BD*, y a dos rectangulos contenidos de la *CB*, y de la *BD*; añada se a entrambas par-
(c) axiom. 1. tes el quadrado de la AD, y quedaràn (c) los quadrados de la *CD*, y de la *AD* iguales a los tres de la *CB*, de la *BD*, de la *AD*, y a dos rectangulos con-
(d) tenidos de la *CB*, y *BD*; pero el quadrado de la
47. P. 1. *AC* (d) es igual a los quadrados de la *CD*, y de la AD: luego el quadrado de la *AC* es igual a los tres de la *CB*, de la *BD*, de la *AD*, y a dos rectangulos contenidos de la CB, y BD: tambien (d) el quadrado de

de la AB es igual a los quadrados de la BD, y de la AD: luego el quadrado de la AC es igual a los quadrados de la CB, de la AB, y a dos rectangulos contenidos de la CB, y BD: luego en los triangulos amblygonios el quadrado, &c. que es lo que se avia demostrar.

En numeros. Sea el lado AC 37. CB 30. AB 13. el quadrado de CB es 900. de AB 169. la suma 1069. se resta del quadrado de AC, que es 1369 y el residuo 300. es el duplo rectangulo contenido de la CB, y de la BD: tomese la mitad, y serà 150. el rectangulo contenido de la CB. y de la BD: partase el rectangulo 150. por el lado CB 30. y el cociente 5. es el lado BD: luego en el triangulo rectangulo ABD, restando el quadrado de la linea BD, que es 25. del quadrado de la linea AB, que es 169 el residuo 144. es el quadrado de la linea AD, y su raiz quadrada 12. es la linea AD, que multiplicada con la mitad de la base CB, darà a conocer el area del triangulo ABC por la 41. P. 1.

THEOREMA 12. PROPOSICION 13.

En los triangulos oxygonios, el quadrado del lado opuesto al angulo agudo es menor que los quadrados de los lados que comprehenden el angulo agudo, dos vezes el rectangulo contenido de vno de los lados que forman el angulo agudo sobre quien cae la perpendicular, y de la linea tomada dentro entre la perpendicular, y el angulo agudo. Fig. 15.

Sea el triangulo oxygonio ABC, y tirese (a) desde A sobre BC la perpendicular AD: digo, que el quadrado de la linea AB, que està opuesta al angulo agudo ACB es menor que los quadrados de las lineas AC, y CB, dos rectangulos contenidos de la linea BC, y de la CD, esto es, que el quadra- (a) 12. P. 1.

 do

do de la linea AB con dos rectangulos contenidos de la BC, y de la CD es igual a los dos quadrados de los lados AC, y CB. Porque la linea recta BC (b) està cortada como quiera en el punto D: luego (b) 7. P. 2. los quadrados de la BC, y de la CD son iguales a dos rectangulos contenidos de la BC, y de la CD, y al quadrado de la BD: añadase a entrambas partes el quadrado de la AD, y seràn los tres quadrados el de la BC, el de la CD, y el de la AD iguales a dos rectangulos contenidos de la BC, y de la CD, y a los quadrados de la BD, y de la AD; pero (c) (c) los quadrados de la CD, y de la AD son 47. P. 1. iguales al quadrado de la AC: luego los dos quadrados de la BC, y de la AC, son iguales a dos rectangulos contenidos de la BC, y de la CD, y a los quadrados de la BD, y de la AD: tambien (c) el quadrado de la AB es igual a los dos quadrados de la BD, y de la AD: luego los quadrados de la BC, y de la AC son iguales a dos rectāgulos contenidos de la BC, y de la CD, y al quadrado de la AB. De la misma manera se demuestra de qualquier otro lado opuesto a vn angulo agudo: luego en los triangulos oxygonios, &c. que es lo que se avia de demostrar.

En numeros. Sea AB 240. AC 292. BC 364. el quadrado de la AC es 85264. el quadrado de la BC es 132496 la suma de los quadrados de AC, y de BC es 217760 restese el quadrado de la AB, que es 57600. y el residuo 160160. son los dos rectangulos contenidos de la BC, y de la CD, y su mitad 80080. es vn rectangulo contenido de la BC, y de

de la CD; partanse los 80080 por el lado BC, y el cociente 220. será la linea CD: luego si el quadrado de la CD, que es 48400. se resta del quadrado de la AC, que es 85264. el residuo 36864. será el quadrado de la AD, y su raiz quadrada 192 es la perpendicular AD, que multiplicada con la mitad de la base BC, dará a conocer el area del triangulo ABC por la 41. P.1.

PROBLEMA 2. PROPOSICION 14.

Formar vn quadrado igual a vn rectilineo dado.

Sea el rectilineo dado A, a quien se ha de formar vn quadrado igual: (a) hagase el paralelogrammo BD rectangulo, igual al rectilineo A, y si el lado BC es igual al lado CD, està hecho lo que se pide, porque se dà el quadrado BD igual al rectilineo A; pero si el lado *BC* no es igual al lado *CD*, alarguese la linea *DC*, y (b) hagase la *CF* igual a la *BC*; cortese la DF (c) por medio en el punto G, y desde èl, como centro, con el semidiametro GD, ò GF; describase el semicirculo DHF, alarguese la linea *BC* hasta H, y tirese la linea GH: digo, que el quadrado de la linea *CH* es igual al rectilineo A. Porque la linea DF està cortada en partes iguales en el punto G, y en desiguales en C: luego (d) el rectangulo contenido de la *DC*, y de la *CF* junto con el quadrado de la *GC*, es igual al quadrado de la GF, ò de la GH su igual; pero el quadrado de la GH es

Fig. 16. (a) 45. P.1. (b) 3. P.1. (c) 10. P.1. (d) 5. P.2.

(e) igual (e) a los quadrados de la GC, y de la CH:
47. p. 1. luego el rectangulo contenido de la DC, y de la CF junto con el quadrado de la GC es igual a los quadrados de la GC, y de la CH: quitese de entrambas partes el quadrado de la GC, y quedarà el rectangulo de la DC, y de la CF igual al quadrado de la CH; pero el rectangulo contenido de la DC, y de la CF es el rectangulo BD, porque la linea CF es igual a la linea BC: luego el quadrado de la linea CH es igual al rectangulo BD, ò al rectilineo A su igual: que es lo que se avia de hazer.

FIN DEL LIBRO SEGUNDO.



LI-

LIBRO TERCERO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EUCLIDES.

DEFINICIONES.

1. Circulos iguales son, cuyos diametros son iguales, ò cuyas lineas rectas tiradas desde el centro à la circumferencia son iguales.

2. Vna linea recta se dize tocar al circulo; quando tocandole, y alargada no le corta, llamase tangēte, *como la linea AB, que toca al circulo AB en el punto A, y alargada no le corta, pero la linea AB, que corta al circulo, se llama secante.* Fig. 18.

3. Los circulos se dizen tocarse entre si, quando tocandose entre si, no se cortan.

4. Las lineas rectas se dizen distar igualmente del centro en vn circulo, quando las perpendiculares sobre ellas, tiradas del centro son iguales; y quando estas son desiguales, las tales lineas se di-

dizen distar desigualmente, y aquella dista mas
Fig. 17. sobre quien la perpendicular es mayor, *como sobre las rectas FG, KL del centro E caen las perpendiculares EH, EM iguales, y assi las lineas FG, KL se dizen distar igualmente del centro E; pero la linea KL dista mas del centro que la BC, sobre la qual cae la perpendicular EI.*

5. Segmento del circulo es, vna figura contenida
Fig. 28. de vna linea recta, y de vna parte de la circumferencia: *como la figura contenida de la linea recta AC, y de la circumferencia ABC.* Quando la linea recta passa por el centro, divide el circulo en dos segmentos iguales: quando no passa por el centro, le divide en dos segmentos desiguales, y se llama mayor el que contiene al centro, y el otro menor.

6. Angulo del segmento es, el que està comprehendido de vna linea recta, y de la circumferen-
Fig. 27. cia: *como el angulo BAE.*

7. Angulo en el segmento se llama, el contenido de dos lineas rectas, tiradas de qualquier punto de la circumferencia à las extremidades de la recta, que es base de dicho segmento, *como el*
Fig. 26. *angulo ACB.*

8. Pero quando las lineas rectas, que comprehenden el dicho angulo tienen por base alguna circumferencia, el tal angulo se dize insistir, ò apoyarse sobre la tal circumferencia, *como el angulo ABC*
Fig. 30. *comprehendido de las lineas rectas AB, BC, que tiene por base la circumferencia AC. Este angulo del antecedente no se distingue en otra cosa, què en la base, aunque este se refiere à la circumferencia sobre que insiste, y el otro*

al

al segmento en que está. Fuera destos tres angulos, ay otro quarto, que se llama el angulo del contacto, y es aquel que se forma de la linea tangente, y de la circunferencia, como el angulo EAB, *que està comprehendido de la recta* AE; *y de la circunferencia* AB. Fig. 28.

9. Sector de vn circulo es, la figura, ó espacio cōprehendido de vna parte de la circumferencia, y de dos lineas rectas, que tiradas de la circumferencia concurren en el centro con qualquier angulo: *como el espacio DHF.* Fig. 30.

10. Semejantes segmentos de circulo son, los que contienen iguales angulos, ò en quienes los angulos son iguales, *como en los segmentos* ABC, DEF; *si los angulos* B, *y* E *son iguales, los segmentos se llamaràn semejantes entre si. La semejança de los segmentos no arguye igualdad de los espacios, si no es quando los circulos son iguales.* Fig. 29.

PROBLEMA I. PROPOSICION I.

Hallar el centro de vn circulo dado.

Sea el circulo dado ADC, de quien se ha de hallar el centro: tirese en el circulo dado la linea recta *AC* como quiera, y (a) cortese por medio en el punto B, y desde èl tirese (b) la BD perpendicular a la *AC*, y alarguese la DB hasta E, y cortese la DE por medio en el punto F: digo, que el punto F es el centro del circulo dado. Porque estando el centro en la linea *DE*, no puede ser otro q̄ el punto F, que la divide en dos partes iguales; pero si està fuera de dicha linea, sea el cētro otro qualquier pūto como G, y tirense las lineas rectas GA, GB, GC. En los triāngulos *ABG*, y *CBG* los dos lados AB, y BG del vno son iguales a los dos CB, y BG del otro, y (c) *GA*, *GC* tam-

Fig. 1.

(a) 10. P. 1.

(b) 11. P. 1.

(c) 15. def. 1

(d) tambien son iguales por ser semidiametros: luego
8. p. 1. (d) los angulos ABG, y CBG son iguales entre si:
(e) luego (e) son rectos, pero el angulo DBC tambien
10. def. 1 es recto: luego (f) el angulo GBC es igual al angulo
(f) ax. 12. *DBC*, la parte a su todo (g) lo que no puede ser:
(g) axiom 9. luego el punto G no puede ser centro, ni otro que el punto F: luego está hallado el centro del circulo dado, que es lo que se avia de hazer.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que si en vn circulo vna linea recta corta a otra recta en dos mitades, y a angulos rectos, el centro del circulo está en la secante.

THEOREMA 1. *PROPOSICION* 2.

Si en la circumferencia de vn circulo se toman qualesquiera dos puntos, la linea recta que los junta, cae dentro del circulo.

Fig. 2. Sea el circulo ACB, y en su circumferencia tomense qualesquiera dos puntos A, y B: digo, que la recta tirada desde A a B cae dentro del circulo.
(a) Porque si no es asi, cayga si es posible fuera del
1. p. 3. circulo, como ADB; (a) busquese el centro E, y tirense las rectas EA, EB, ECD. En el triangulo
(b) 15. def. 1 EADB los dos lados EA, y EB (b) son iguales en-
(c) tre si: luego (c) el angulo EAD es igual al angulo
5. p. 1. EBD; pero el angulo ADE es mayor (d) que el
(d) 16. p. 1. angulo EBD, el externo a su interno, y opuesto: lue-

luego (e) tambien es mayor que el angulo EAD: (e) axiom. 1.
luego (f) la linea EA opuesta al mayor angulo (f) 19. p. 1.
ADE, es mayor que la linea ED opuesta al menor
angulo EAD; pero la linea EC (g) es igual a la (g) defin. 15.
EA: luego la linea EC tambien es mayor que la
ED, la parte que su todo (h) lo que no puede ser: (h) axiom. 9.
luego la linea recta tirada desde A a B no puede
caer fuera del circulo: de la misma suerte se demuestra, que tampoco puede concurrir con la circumferencia: luego cae dentro del circulo, que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que la linea tangente toca la circumferencia del circulo en vn solo punto: porque si la tocara en dos puntos la parte que os juntara, cayera dentro del circulo.

THEOREMA 2. PROPSICION 3.

Si en vn circulo vna linea recta tirada por el centro corta por medio a otra recta no tirada por el centro, harà con ella angulos rectos; y si haze con ella angulos rectos, tambien la corta por medio.

Sea el circulo BCD, y en èl vna linea recta CE tirada por el centro corte por medio en F la linea BD no tirada por el centro: Digo lo primero, que los angulos BFA, y DFA son rectos. Tomese el centro A (a) y tirense las lineas BA, DA. En los triangulos BFA, y DFA los dos lados BF, y FA del

Fig. 3.

(a) 1. p. 3.

(b) del vno son iguales a los dos lados DF, y FA del
defin. 15. otro, y la base (b) BA es igual a la base DA: luego
(c) 8. p. 1. (c) los dos angulos BFA, DFA son iguales entre
(d) si: luego (d) son rectos.
10. def. 1 Digo lo segundo, que si la linea CE cortando a
la linea BD haze con ella angulos rectos, que la
corta en dos partes iguales. Porque los dos angu-
(e) los (e) BFA, DFA son iguales entre si, y los dos
ax. 12. ABD, ADB (f) tambien iguales, y (g) el tercero
(f) 5. p. 1. BAF igual al tercero DAF: luego en los dos trian-
(g) gulos BAF, y DAF los dos lados BA, AF del vno
32. p. 1. son iguales a los dos DA, AF del otro, y los angu-
(h) los BAF, DAF iguales: luego (h) la base BF es
. p. 1. igual a la base DF: luego si en vn circulo, &c. que
es lo que se avia de demostrar.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que en vn triangulo isosceles, si vna linea recta corta la base en dos mitades, la corta tambien en angulos rectos; y al contrario: como està demostrado, que la linea AF es perpendicular a la linea BD.

THEOREMA 3. PROPOSICION 4.

Si en vn circulo dos lineas rectas no tiradas por el centro se cortan entre si, no se cortaràn mutuamente en dos partes iguales.

Fig. 4. En el circulo ABC cortense las dos lineas rec-
tas AB, y CD, no tiradas por el centro en el pun-

to E: Digo que no se cortan mutuamente en dos partes iguales. Porque si es posible cortense mutuamente por medio, y sea la AE igual a la EB, y la CE igual a la ED, tomese (a) el centro F, y tirese la linea FE; y porque la linea FE tirada por el centro corta por medio la linea CD no tirada por el centro (b) harà con ella angulos rectos, y serà el angulo *F*ED recto. Tambien la lina recta FE tirada por el centro, corta por medio a la linea recta AB no tirada por el centro: luego (b) harà con ella angulos rectos, y serà el angulo FEB recto; pero el angulo FED tambien era recto: luego (c) el angulo FED es igual al angulo FEB, la parte a su todo (d) lo que no puede ser: luego si en vn circulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 1. P. 3.

(b) 3. P. 3.

(c) ax. 12.

(d) axiom. 9.

THEOREMA 4. PROPOSICION 5.

Si dos tirculos se cortan entre si, no tendràn entrambos vn mismo centro.

Cortense los dos circulos ABD, y EBD en los puntos B, y D: digo, que no tienen vn mismo centro. Porque si es possible sea el punto C centro de entrambos, y tirense las rectas CB, y CEA: luego (a) los semidiametros CB, y CE del circulo EBD son iguales entre si. Assimismo los semidiametros *CB*, y *CA* del circulo ABD son iguales entre si: luego (b) las lineas *CE*, y *CA* iguales a la *CB* son iguales en-

Fig. 5.

(a) 15. def. 1.

(b) axiom. 1.

(c) entre si, la parte a su todo (c) lo que no puede ser:
ax. 9. luego si dos circulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 5. PROPOSICION 6.

Si dos circulos se tocan entre si por de dentro, no tendràn entrambos vn mismo centro.

Fig. 6. Toquense por de dentro los dos circulos ABE, y CBF en B: digo, que no pueden tener vn mismo centro. Porque si es possible sea el punto D centro de entrambos, y tirense las lineas DB al contacto,
(d) y DAC: luego (d) los semidiametros DB, y DA
15.def.1 del circulo ABE son iguales entre si. Assimismo los semidiametros DB, y DC del circulo CBF son
(e) iguales entre si: luego (e) las lineas DA, y DC
axiom.1. iguales a la DB, son iguales entre si, la parte a su
(f) todo (f) lo que no puede ser: luego el punto D no
axiom 9. puede ser centro de entrambos circulos: luego si dos circulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 6. PROPOSICION 7.

Si en el diametro de vn circulo se toma qualquier punto, que no sea el centro, y desde èl se tiran a la circumferencia algunas lineas rectas; la mayor serà en la que està el centro, y la mas pequeña el residuo desta. De las otras siempre la mas cercana a la que passa por el centro es mayor que la mas apar-

apartada; y desde dicho punto se podràn tirar a la circumferencia solamente dos lineas rectas iguales, de la vna, y de la otra parte de la minima, ò de la maxima.

Sea el circulo ACDB, y su diametro AB, el centro el punto F, y en el diametro AB tomese el punto G (ò otro qualquiera) y desde èl a la circumferencia tirense las lineas rectas GC, GD, GE; digo lo primero, que la GA es la mayor entre todas las que del punto G se pueden tirar a la circumferencia. Tirense las lineas FC, FD, FE. Y porque en el triangulo CFG los dos lados CF, y FG (a) son mayores, que el tercero CG; pero (b) CF es igual a la AF tiradas del centro: luego las AF, y FG, ò la linea AG tambien es mayor que la linea CG. De la misma suerte se demuestra, que la linea GA es mayor que la GD, y que la GE, y que qualquiera otra.

Fig. 7.

(a) 20. P. 1.

(b) 15. def. 1

Digo lo segundo, que la GB es la menor entre todas las que del punto G se pueden tirar a la circumferencia. Porque en el triangulo EFG los dos lados EG, y GF son mayores que (a) el tercero FE, ò su igual FB: luego quitando de entrambas partes la FG comun, (d) quedarà la linea GB menor que la GE. De la misma suerte se demuestra, que la GB es menor que la GD, y que la GC, y que qualquiera otra.

(d) axiom. 5.

Digo lo tercero, que de las otras la GC es mayor que la GD, y esta mayor que la GE. Porque en

en los triangulos GFC, y *GFD* los dos lados *GF*, *FC* del vno, son iguales a los dos lados *GF FD* del otro, y el angulo *GFC* es mayor q̃ el angulo *GFD*:
(e) 24. P.1. luego (e) la base GC es mayor que la base GD. Assimismo se demostrarà, que la GD es mayor que la GE, y qualquiera otra mas apartada que ella de la maxima GA.

Digo lo quarto, que a cada vna como a la GE no se puede tirar mas que vna linea recta igual, como la GH a la otra parte de la minima GB, ò de la
(f) 23. P. 1. maxima GA. Al angulo *GFE* hagase (f) en la otra parte igual el angulo *GFH*, y tirese la GH. En los triangulos *EFG*, y *HFG* los dos lados *EF*, y *FG* del vno son iguales a los dos lados *HF*, *FG* del otro, y los angulos *EFG*, *HFG* iguales por la cons-
(g) 4. P.1. truccion: luego (g) la base GE es igual a la base GH; pero ninguna otra puede ser igual a la GH, que no concurra con ella, porque avia de terminarse, ò entre H, y A, y fuera mayor que la GH, ò entre H, y B, y fuera menor que la GH: luego si en el diametro de vn circulo se toma, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 7. PROPOSICION 8.

Si fuera de vn circulo se toma qualquier punto, y desde él se tiran algunas lineas rectas, de las quales vna passe por el centro, y las demàs como quiera: de las lineas rectas, que

caen

caen en la circumferencia concava, la mayor es la que passa por el centro; y de las otras la mas cercana a la que passa por el centro, es mayor que la mas apartada. Pero de las que caen en la circumferencia convexa, la menor es la que està entre el dicho punto, y el diametro, y de las otras la mas cercana à la menor, es siempre menor que la mas apartada: y desde este punto solamente dos lineas rectas se pueden tirar iguales entre si al circulo de vna y otra parte de la menor, ò de la mayor. (b)

Fuera del circulo BGH, cuyo centro es el punto K, tomese el punto A, y desde èl tirense las lineas rectas *ABI*, *ACH*, *ADG*, de las quales la *ABI* passe por el centro: digo lo primero, que la linea *AI* es la mayor de todas las que caen en la circumferencia concava. Tirense las lineas KC, KD, KG, KH; y porque en el triangulo KAH (a) los dos lados *AK*, *KH* juntos son mayores que el tercero *AH*; pero (b) KH es igual a KI: luego tambien las lineas *AK*, y KI, ò la linea *AI* es mayor que la linea *AH*. De la misma suerte se demostrarà, que la linea *AI* es mayor que la *AG*, y que qualquiera otra de las que se terminan en la circumferencia concava. Fig. 8. (a) 20. p. 1. (b) 15. d. 1.

Digo lo segundo, que la linea *AH* mas cercana à la *AI* es mayor que la *AG* mas apartada. Porque en los triangulos *AKH*, y *AKG*, los dos lados *AK*, y *KH* del vno son iguales à los dos lados *AK*, y KG del otro; pero el angulo *AKH* es

(b) 24. P. 1. es mayor que el angulo AK*G*: luego (b) la base AH es mayor que la base *AG*. De la misma suerte se demostrarà, que la *AG* es mayor que qualquiera otra mas apartada de la maxima AI.

Digo lo tercero, que la linea AB es la menor de todas las que caen sobre la circumferencia convexa. (d) 20. P. 1. Porque (d) en el triangulo ACK la linea AK es menor que las dos AC, y CK juntas: luego si de entrambas partes se quitan partes iguales KB, y (e) ax. 5. KC, quedarà (e) la linea *AB* menor que la *AC*. De la misma manera se demuestra que la *AB* es menor que la *AD*, y que qualquiera otra.

Digo lo quarto, que la *AC* mas cercana a la minima *AB* es menor que la *AD*. Porque en los triangulos *AD*K, y *AC*K las dos lineas *AC*, y *C*K juntas (f) 21. P. 1. (f) son menores que las *AD*, y *D*K juntas: luego si quitamos de entrambas partes las *C*K, y *D*K iguales, quedarà (e) la linea *AC* menor que la *AD*. De la misma suerte se demostrarà, que la linea *AD* es menor que qualquiera otra mas apartada que ella de la *AB*.

*D*igo lo quinto, que desde el punto *A* al circulo no pueden caer mas que dos lineas rectas iguales de vna, y otra parte de la minima *AB*, ò de la maxima *AI*. (g) 23. P. 1. Al angulo *AKC* hagase (g) igual el angulo *AKL*, y tirese la linea *AL*. En los dos triangulos *AKC*, y *AKL* los dos lados *AK*, *KC* del vno son iguales a los dos lados AK, KL del otro, y los angu-

angulos AKC, AKL tambien ſon iguales por la (h) 4. P. 1.
conſtruccion: luego (h) las baſes AC, y AL ſon iguales; pero no pueden caer mas que dos iguales, porque ſi cayera vna mas, avian de eſtar dos lineas iguales de vna parte de la minima, ó de la maxima, vna mas cercana, y otra mas apartada, lo que es contra lo demoſtrado: luego ſi fuera de vn circulo ſe toma, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

THEOREMA 8. *PROPOSICION* 9.

Si dentro de vn circulo ſe toma vn punto, y deſde èl a la circumferencia caen mas que dos lineas rectas iguales, el punto tomado es el centro del dicho circulo.

Dentro del circulo BCD tomeſe el punto A, y Fig. 9.
deſde èl a la circumferencia tirenſe mas que dos lineas rectas iguales AB, AC, AD: digo, que el punto A es el centro del circulo BCD. Porque ſi no lo es, ſea ſi es poſsible otro qualquier punto como E el centro, y tireſe la recta GAEF: luego (a) (a) 7. P. 3.
la linea AF en que eſtà el centro E es la mayor de las que deſde el punto A llegan a la circumferencia, y la linea AD es mayor que la AC, y la AC mayor que la AB, lo que es contra lo ſupueſto; porque las lineas AD, AC, AB ſe ſuponen iguales: luego el punto E no puede ſer el centro, ſino el punto A, que es lo que ſe avia de demoſtrar.

THEOREMA 9. PROPOSICION 10.

Vn circulo no puede cortar a otro circulo en mas que dos puntos.

Fig. 10. Porque si es possible el circulo ABC corte al circulo GDH en los puntos A, B, D, E, y del circulo ABC tomese (a) el centro I, tirense las lineas rectas I A, I B, I D, I E : luego las lineas I A, I B, I D, I E (b) son iguales entre si en el circulo ABC; y porque dentro del circulo GDH se tomò vn punto I, del qual salen a su circumferencia mas que dos lineas rectas I A, I B, I D, I E iguales entre si : luego (c) el punto I serà el centro del circulo GDH; pero I tambien es centro del circulo ABC : luego dos circulos que se cortan entre si tienen vn mismo centro (d) lo que no puede ser : luego vn circulo no puede, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 1. P. 3.
(b) 15. def. 1
(c) 9. P. 3.
(d) 5. P. 3.

THEOREMA 10. PROPOSICION 11.

Si dos circulos se tocan por de dentro, y se toman sus centros, la linea recta que los junta alargada cairà en el contacto de dichos circulos.

Fig. 11. Toquense los dos circulos ABC, y ADE por de dentro en A, y (a) tomense los centros destos cir-

(a) 1. P. 3.

circulos G, y H, porque (b) son diversos: digo, que la linea recta tirada por estos centros, y alargada se terminarà en el contacto A, como la linea GHA. Porque si no es assi, sean si es possible los centros dispuestos de suerte, que la linea que los junta no se termine en el contacto, como los puntos G, y F, por quienes passe la EFGD, y sea el punto F centro del circulo ABC, y el G del circulo ADE; tirense las lineas AG, y AF: y porque en el triangulo AFG, los dos lados GF, y FA juntos (c) son mayores que el GA solo, y (d) la GA es igual a la GE: luego tambien las rectas GF, y FA juntas son mayores que la GE: quitese pues de entràbas partes la GF comun, y (e) quedarà la linea FA mayor que la FE; pero (d) la FA es igual a la FC por ser semidiametros del circulo ABC: luego la linea FC es mayor que la FE, la parte que su todo (f) lo que no puede ser.

(b) 6. p. 3.
(c) 20. p. 1.
(d) 15. def. 1.
(e) axiom. 5.
(f) axiom. 9.

Digase, que el punto F es centro del circulo ADE, y G del circulo ABC; y porque (c) en el triangulo AFG los dos lados FG, y GA juntos son mayores, que el tercero FA, ò que su igual FD: luego si de entrambas partes se quita la FG comun, quedarà la linea GA mayor que la GD; pero la GA es igual a la GB, por ser el G centro del circulo ABC: luego tambien la linea *GB* es mayor que la *GD*, la parte que su todo, lo que no puede ser: luego los centros de dos circulos,

que se tocan por de dentro no pueden ser dispuestos de suerte, que la linea recta que los junta no se termine en el contacto: luego si dos circulos se tocan,&c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 11. PROPOSICION 12.

Si dos circulos se tocan por defuera, la linea recta que junta sus centros, passara por el contacto.

Fig. 12. Toquense por defuera los circulos ABC, y DBE en B, y tomense (a) sus centros L, y M: digo, que la linea recta que los junta passarà por el contacto B, como la LBM. Porque si no es asi, sean si es possible los centros F, y G, y juntelos la recta FIKG, tirense las lineas FB, GB; y porque F se dize que es centro del circulo ABC, la linea FB serà igual (b) a la linea FI. Assimismo, porque G se dize ser centro del circulo DBE, la linea GB serià igual a la linea GK: luego en el triangulo FBG los dos lados FB, BG son menores que el tercero FG, compuesto de las lineas FI, GK iguales a las dos, y de la parte IK (c) lo que no puede ser: luego si dos circulos,&c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 1. P. 3.

(b) 15. def. 1.

(c) 20. P. 1.

THEOREMA 12. PROPOSICION 13.

Vn circulo no toca a otro circulo en mas que vn punto, sea por de dentro, ò por defuera.

Por-

Porque si es possible toque lo primero el circulo ECF al circulo ABC por de dentro en mas puntos que vno, como en A, y C, y (a) tomense sus centros G, y H: luego (b) la linea recta que los junta cairà en los contactos A, y C, como la AGHC; y porque el punto G es centro (c) los semidiametros GA, GC seràn iguales entre si: luego la linea recta GA es mayor que HC, y la HA serà mucho mayor que la HC. Tambien H es centro: luego (c) la linea HA serà igual a la HC; pero HA està demostrada mucho mayor que la HC: luego la *HA* es mayor, y igual a la HC lo que no puede ser. Fig. 13. (a) 1. P. 3. (b) 11. P. 3. (c) 15. dif. 2

Toquense lo segundo, si puede ser, dos circulos por de dentro en mas que vn punto de la circumferencia hàzia la misma parte, como en CL; tomense (a) los centros *A*, y *B*: luego (b) la linea recta *ABC* tirada por los centros cae en el contacto: tirense las lineas *AL*, *BL* al otro punto del contacto; y porque el punto B es centro, las lineas BC, y *B*L (c) seràn iguales entre si: luego añadiendo a entrambas la linea *BA* comun, quedaràn las dos BL, y *BA* iguales a la linea *AC*; pero la *AC* (c) es igual al semidiametro *AL*: luego los dos lados BL, y *BA* juntos del triangulo *ABL*, son iguales al tercero *AL* (d) lo que no puede ser. Fig. 14. (d) 20. P. 1.

Toque lo tercero por defuera si puede ser el circulo *ABF* al circulo *CBF* en mas puntos que vno; tomense los centros D, y E tirese la linea recta

(b) 11. P. 3. ta DE, que (b) passarà por el contacto B, y tirense las lineas DF, EF al otro punto del contacto; y porque el punto D es centro, las lineas DB, DF son iguales entre si, assimismo las EB, EF son iguales entre si: luego en el triangulo *DEF* los dos lados *FD*, *FE* son iguales al tercero DE (c) lo que no puede ser: luego vn circulo no toca, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(c) 20. P. 1.

THEOREMA 13. *PROPOSICION* 14.

En vn circulo iguales lineas rectas distan igualmente de el centro: y las que igualmente distan del centro son iguales entre si.

Fig. 16.

En el circulo ABCD, cuyo centro es el punto E sean las lineas rectas AB, y DC iguales: digo, que distan igualmente del centro. Tirense sobre ellas las perpendiculares *EF*, *EG*, y las lineas *AE*, *DE*; y porque la recta *EF* tirada por el centro corta a la *AB*, no tirada por el centro a angulos rectos, la
(a) 3. P. 3. cortarà (a) por medio en el punto *F*. Assimismo
(b) axiom. 7. la DC està cortada por medio en el punto *G*: luego (b) las mitades *AF*, y *DG* son iguales entre si.
(c) 46. P. 1. Y porque los semidiametros *EA*, *ED* son iguales, los quadrados de las lineas EA, ED (c) tambien
(d) 47. P. 1. seràn iguales entre si; pero el quadrado de la *EA* es igual a los dos quadrados de *AF*, y de FE (d) y

el

el quadrado de ED igual a los quadrados de *DG*, y *GE*: luego tambien los quadrados de *AF*, y de *FE* juntos seràn iguales a los quadrados de *DG*, y *GE* juntos; pero (e) los quadrados de iguales lineas *AF*, y *DG* son iguales: luego los residuos de las lineas *FE*, y *GE* tambien son iguales, y (e) las lineas *FE*, y *GE* son iguales: luego (f) las lineas *AB*, y *DC* distan igualmente del centro.

(e) 46. p. 1. (f) 4. def. 3.

Disten las lineas *AB*, y DC igualmente del centro E: digo, que son iguales entre si. Porque los quadrados de las lineas *AF*, y *FE* son iguales a los dos quadrados de las *DG*, y *GE*, pero los quadrados de las *FE*, y *GE* tambien son iguales entre si (f) porque se suponen las *FE*, y *GE* iguales: luego los residuos de las *AF*, y *DG* son iguales: luego las lineas *AF*, y *DG* (e) tambien son iguales, pero (g) *AF*, y *DG* son mitades de las *AB*, y *DC*: luego (h) las *AB*, y *DC* son iguales entre si: luego en vn circulo iguales lineas rectas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(g) 3. p. 3. (h) axiom. 6.

THEOREMA 14. *PROPOSICION* 15.

En vn circulo la mayor linea es el diametro, y de las otras la mas cercana al centro mayor que la mas apartada.

En

Fig. 17. En el circulo *ABCD*, cuyo centro es E, tirese el diametro *AD*, y la *BC* mas cercana a èl, y FG la mas apartada: digo, que la *AD* es la mayor de todas, y la *BC* mayor que la FG. Desde el centro E sobre las dos *BC*, y FG tirense las perpendiculares EI, EH; y porque la linea FG està mas apartada del centro que la *BC* (a) la perpendicular EH serà mayor que la derpendicular EI: alarguese la EI, y hagase EM igual a la EH, y por el punto M tirese la KL perpendicular a la EM, y tirense las lineas EB, EC, EK, EL.

(a) 4. def. 3.

Lo primero, porque los dos lados EB, E *C* del triangulo EBC (b) son mayores que el tercero BC, y el diametro *AD* es igual (c) a los dos lados EB, y *EC*: luego el diametro *AD* es mayor que la linea *BC*: assimismo se demuestra, que la *AD* es mayor que qualquiera otra.

(b) 20. p. 1. (c) 15. def. 1

Lo segundo, porque en el triangulo *BEC* los dos lados BE, CE son iguales a los dos lados *KE*, *LE* del triangulo *KEL*; pero el angulo *BEC* es mayor que el angulo *KEL*: luego (d) la base *BC* es mayor que la base *KL*; pero (e) la *KL* es igual a la FG, porque las perpendiculares *EM*, *EH* son iguales: luego la *BC* mas cercana al centro es mayor que la FG mas apartada: luego en vn circulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(d) 24. p. 1. (e) 14. p. 3.

THEO-

THEOREMA 15. PROPOSICION 16.

La linea recta tirada de la extremidad del diametro, haziendo con èl angulos rectòs caìrà fuera del circulo, y entre esta, y la circumferencia no podrà caer otra recta ; y el angulo del semicirculo es mayor que qualquier otro agudo rectilineo, y el residuo menor.

En el circulo ABC, cuyo centro es D, tirese el diametro AC: digo lo primero, qne la linea recta, que se tira desde A en angulos rectos con la AC, cae fuera del circulo. Porque si puede ser cayga dentro como la AB, y tirese la recta DB, y serà la DA igual a la DB: luego (a) los angulos sobre la base DAB, y DBA son iguales entre si; pero el angulo DAB es recto por la suposicion : luego tambien el angulo DBA es recto: luego dos angulos en el triangulo DAB son iguales a dos rectos (b) lo que no puede ser: luego la linea recta tirada del punto A en angulos rectos con la AC cae fuera de el circulo, como la AE. Fig. 18. (a) 5. P. 1. (b) 17. P. 1.

Digo lo segundo, que entre la linea recta AE, y la circumferencia ABC no puede caer otra recta. Porque si es possible cayga otra recta como la AH y tirese (c) del punto D sobre la AH vna perpendicular, como la DIH; y porque el angulo DHA es recto, y mayor (d) que el angulo DAH, la linea DA (e) opuesta al mayor angulo en el triangulo (c) 12. P. 1. (d) 32. P. 1. (e) 19. P. 1.

DAH es mayor que la linea DH opuesta al menor angulo; pero la DI, parte de la DH, es igual (f) a la DA: luego la DI es mayor que la DH, lo que no puede ser: luego entre la recta AE, y la circumferencia ABC no puede caer otra recta.

(f) 15. def. 1

Digo lo tercero, que el angulo CAB contenido del diametro AC, y de la circumferencia ABC, es mayor que qualquier angulo agudo rectilineo: y el residuo EAB contenido de la circumferencia ABC, y de la recta AE es menor que qualquiera angulo agudo rectilineo. Porque si puede aver algun angulo agudo rectilineo mayor que el angulo CAB, y menor que el recto CAE caira entre la circumferencia ABC, y la recta AE otra linea recta, que haga mayor angulo que el CAB, y menor que el recto CAE; pero està demostrado, que entre la circumferēcia ABC, y la recta AE no puede caer otra recta: luego el angulo del semicirculo es mayor que qualquier angulo agudo rectilineo. Assimismo si puede aver algun angulo rectilineo agudo menor que el angulo EAB, caira otra recta entre la circumferencia ABC, y la recta AE, que es contra lo demostrado: luego el angulo EAB contenido de la circumferencia ABC, y de la recta AE es menor que qualquier agudo rectilineo: luego la linea recta tirada, &c. que es lo que se avia de demostrar.

co-

COROLARIO.

De aqui se sigue, que si por la extremidad del diametro se tira vna perpendicular a èl, serà tangente del circulo. Porque està demostrado, que la perpendicular AE cae fuera del circulo, y solamente le toca en el punto A.

PROBLEMA 2. PROPOSICION 17.

De vn punto dado tirar vna linea recta, que toque a vn circulo dado.

Del punto dado A, y al circulo dado BCF se ha de tirar vna linea recta tangente de dicho circulo. Fig. 19. En el circulo dado (a) tomese el centro D, tirese la recta ABD, que corta al circulo dado en el punto B: del centro D con el semidiametro DA describase el circulo AEG, y por el punto B tirese la linea BE perpendicular a la AD; tirense tambien la DE, que corta el circulo dado en el puuto C, y la linea AC: digo, que la AC es tangente del circulo BCF. Porque en los dos triangulos EBD, y ACD (b) los dos lados ED, DB del vno son iguales a los dos lados AD, DC del otro, y el angulo D comun: luego (c) el angulo EBD es igual al angulo ACD, pero el angulo EBD es recto por la construccion: luego tambien el angulo ACD es recto: luego (d) la linea AC es tangente del circulo BCF: luego de vn punto dado, &c. que es lo que se avia de hazer.

(a) 1. P. 3.

(b) 15. d. f. 1

(c) 4. l. 1.

(d) 16. P. 3.

THEOREMA 16. PROPOSICION 18.

Si vna linea recta toca vn circulo, y del centro al contacto se tira vna recta, esta serà perpendicular a la tangente.

Fig. 20. Al circulo CD toque la linea recta AB en el punto C, y del centro al contacto tirese la recta EC: digo, que la EC es perpendicular a la tangente AB. Porque si no lo es, tirese si es posible otra recta como la EF perpendicular a la AB: y por quanto la EF se supone perpendicular a la AB, serà el angulo EFC recto, y (a) mayor que el angulo ECF: luego (b) en el triangulo ECF la linea EC opuesta al mayor angulo es mayor que la EF opuesta al menor angulo, pero la ED, parte de la EF, es igual a la EC: luego tambien la ED es mayor que la EF, lo que no puede ser: luego la linea EC es perpendicular a la tangente AB, que es lo que se avia de demostrar.

(a) 32. P. 1.
(b) 19. P. 1.

THEOREMA 17. PROPOSICION 19.

Si vna linea recta toca vn circulo, y del contacto se tira vna perpendicular a la tangente, el centro del circulo estarà en la perpendicular.

Fig. 21. La linea recta AB toque el circulo CDE en el punto C, y tirese (a) la linea CE perpendicular a la AB: digo, que en la linea CE està el centro del cir-

(a) 11. P. 1.

circulo. Porque si no està en ella, estè si es possible fuera como en F, tirese la linea FC, y serà (b) la linea FC, que se tira del centro al contacto, perpendicular a la linea AB: luego (c) el angulo FCB serà recto; pero el angulo ECB tambien es recto por la construccion: luego (d) los angulos FCB, ECB seràn iguales, lo que no puede ser: luego el centro no està en F, sino en la perpendicular CE: luego si vna linea recta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(b) 18. P. 3.
(c) 10. def. 1
(d) ax. 12.

THEOREMA 18. PROPOSICION 26.

El angulo què se forma en el centro de vn circulo es duplo del que se forma en la circunferencia, quando tienen entrambos por base vna misma circunferencia.

Formese el angulo BDC en el centro D del circulo BAC: digo, que es duplo del angulo BAC, formado en la circumferencia, que tienen por base la misma circumferencia BEC. Tirese la linea ADF, y porque los semidiametros DA, DC son iguales, los angulos DAC, DCA sobre la base (a) son iguales entre si: luego entrambos juntos son el duplo del vno *DAC*; pero (b) el angulo externo *FDC* es igual a los dos angulos *DAC*, *DCA* juntos: luego el angulo *FDC* es tambien duplo del angulo *DAC*. Assimismo se demuestra, que el angulo BDF es duplo del angulo DAB: luego el angulo

Fig. 221
(a) 5. P. 1.
(b) 32. P. 1.

BDC,

BDC compuesto de los *FDC*, *BDF*; es duplo del angulo total *BAC*.

Fig. 23. Formese de otra suerte el angulo *BDC* en el centro D, y el *BAC* en la circumferencia sobre la misma base *BEC*, y tirese la linea recta *ADF*; y porque el angulo *FDC* està en el centro *D*, y el *FAC* en la circumferencia, el angulo *FDC* es duplo del angulo *FAC*, como està demostrado: por la misma razon el angulo *FDB* es duplo del angulo *FAB*. Siendo pues el angulo total *FDC* duplo del angulo total *FAC*, y el *FDB* parte del vno, y duplo del *FAB*, parte del otro: luego (d) quitando el angulo *FDB* del angulo *FDC*; y quitando tambien el angulo *FAB* del angulo *FAC*, quedarà el residuo *BDC* duplo del residuo *BAC*: luego el angulo que se forma, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(d) Ax. 20.

THEOREMA 19. PROPOSICION 21.

En vn circulo los angulos que estàn en vn mismo segmento, son iguales entre si.

Fig. 24. Estèn en el segmento *DABC* los angulos *DAC*, *DBC*: digo, que son iguales entre si. Formese el angulo DEC en el centro E; y porquanto los angulos DAC, y DBC en la circumferencia (a) son mitades del angulo *DEC* en el centro: luego (b) son iguales entre si los angulos DAC, y DBC: luego en vn circulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 20. P. 3.
(b) Axiom. 1.

THEO-

THEOREMA 29. PROPOSICION 22.

Los angulos opuestos de las figuras quadrilateras inscriptas en vn circulo, son iguales a dos rectos.

En el circulo *ABC* formese el quadrilatero ABCD de suerte, que todos sus angulos toquen la circumferencia [y esto se llama inscribir vna figura en el circulo:] digo, que qualesquiera dos angulos opuestos, como *ABC*, y *ADC* son iguales a dos rectos. Tirense las lineas rectas *AC*, y *BD*; y porque los angulos *ABD*, *ACD* estàn en vn mismo segmento *ABCD* (a) son iguales entre si. Assimismo los dos angulos DBC, DAC, que estàn en el segmento DABC son iguales entre si: luego el angulo *ABC* [compuesto de los dos *ABD*, y *DBC*] es igual a los dos angulos *ACD*, y *DAC* juntos: añadase a entrambas partes el angulo *ADC*, y quedaràn (b) los dos angulos *ABC*, *ADC* iguales a los tres *ACD*, *DAC*, *ADC*; pero (c) estos tres son iguales a dos rectos: luego tambien los dos angulos opuestos ABC, ADC son iguales a dos rectos, que es lo que se avia de demostrar. De la misma suerte se demuestra, que los dos angulos opuestos BCD, y BAD son iguales a dos rectos: luego los angulos opuestos, &c.

Fig. 25.
(a) 21. P. 3.
(b) axiom. 2.
(c) 32. P. 1.

THEO-

THEOREMA 21. PROPOSICION 23.

Sobre vna linea recta no se podràn constituir dos segmentos de circulos semejantes, y desiguales, y hàzia las mismas partes.

Fig. 16. Porque si es possible sobre la linea recta AB constituyanse dos segmentos de circulos semejantes, y desiguales: conviene a saber *ACB*, y *ADB* hàzia vnas mismas partes, y tirese la linea recta *ACD*, y las rectas *BC*, *BD*. Y por que el segmento *ACB* se supone semejante al segmento ADB, serà (a) el angulo *ACB* externo igual al angulo *ADB* interno, y opuesto; pero (b) esto no puede ser: luego tampoco sobre vna linea recta se podràn constituir, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 10.d.3

(b) 16.P.1.

THEOREMA 22. PROPOSICION 24.

Semejantes segmentos de circulos constituidos sobre iguales lineas rectas, son iguales entre si.

Fig. 27. Sobre las lineas rectas iguales *AB*, *CD* sean constituidos los segmentos *AEB*, *CFD* semejantes: digo, que son iguales entre si. Porque sobrepuesta la linea *AB* sobre la linea *CD* de suerte, que el punto *A* concurra con el punto *C*, se ajustaràn (a) las lineas *AB*, y *CD*, y tambien los segmentos *AEB*, *CFD*. Porque si no se ajustan, ò cairà el segmento

(a) axiom.8.

to AEB, como el CED lo (b) que no puede ser; ò como el CGD, lo que tampoco puede ser (c) porque vn circulo no corta a otro circulo en mas que dos puntos: luego los segmentos AEB, y CFD convendràn entre si: luego (d) son iguales: luego semejantes segmentos, &c. que es lo que se avia de demostrar. (b) 23. P. 3. (c) 10. P. 3. (d) axiom. 8.

PROBLEMA 3. PROPOSICION 25.

Dado vn segmento de circulo, describir el circulo cuyo segmento es.

Sea el segmento dado ABC, se ha de describir el circulo, cuyo segmento es. Tirense qualesquiera dos lineas rectas AB, BC, y (a) partanse por medio en los puntos D, y E, y dellos (b) tirense las perpendiculares DF, EF: digo, que el punto F, en que concurren las perpendiculares DF, EF, es el centro del circulo que se ha de describir. Porque (c) en la perpendicular DF està el centro deste circulo; tambien està en la perpendicular EF: luego està en el comun concurso, que es el punto F, y dèl se describirà el circulo, que es lo que se avia de hazer. Fig. 28. (a) 10. P. 1. (b) 11. P. 1. (c) Cor. 1. P. 3.

THEOREMA 23. PROPOSICION 26.

En circulos iguales, iguales angulos insisten sobre iguales

 les

les circumferencias, ò estèn formados en los centros, ò en las circumferencias.

Fig. 29. En los circulos iguales ABC, DEF estèn formados los angulos AGC, DHF iguales en los centros G, y H: digo, que las circumferencias AIC, DKF sobre quienes insisten, son iguales entre si. Tirense las lineas AB, BC, y DE, FE a qualesquiera puntos de la circumferencia, como B, y E; tirense tambien las rectas AC, DF: y porque en los triangulos AGC, DHF (a) los dos lados AG, GC, son iguales a los dos lados DH, HF, y el angulo AGC se supone igual al angulo DHF: luego (b) la base AC es igual a la base DF; y porque los angulos ABC, DEF (c) son mitades de los angulos AGC, DHF, los angulos B, y E (d) son iguales entre si: luego (e) el segmento AEC es semejante al segmento DEF, en los quales estàn iguales angulos; y estàn sobre iguales lineas rectas AC, DF: luego (f) son iguales entre si los segmentos ABC, DEF, tambien todo el circulo es igual a todo el circulo: luego (g) los residuos AIC, DKF son iguales entre si.

(a) 1. def. 3.
(b) 4. P. 1.
(c) 20. P. 3.
(d) axiom. 7.
(e) 10. def. 3
(f) 24. P. 3.
(g) axiom. 3.

Sean lo segundo iguales los angulos ABC, DEF, formados en las circumferencias: digo, que la circumferencia AIC, es igual a la circumferencia DKF. Porque (h) los angulos ABC, DEF son mitades de los angulos AGC, DHF: luego (i) los angulos AGC, DHF son tambien iguales: luego las

(h) 20. P. 3.
(i) axiom. 6.

las circumferencias AIC, DKF son iguales entre si, como està demostrado: luego en circulos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 24. PROPOSICION 27.

En iguales circulos los angulos que insisten sobre iguales circumferencias, son iguales entre si, ò estèn formados en los centros, ò en las circumferencias.

En los circulos iguales ABC, DEF sobre las circumferencias iguales AC, DF insistan los angulos AGC, DHF formados en los centros, y los ABC, DEF, formados en las circumferencias: digo, que el angulo AGC es igual al angulo DHF, y el ABC al DEF. Porque si el angulo AGC no es igual al angulo DHF, serà vno dellos mayor: sea si es possible mayor el AGC, y a la linea recta AG en el centro G, hagase (a) el angulo AGI igual al angulo DHF: luego (b) la circumferencia AI serà igual a la circumferencia DF; pero la circumferencia AC tambien se suponia igual a la circumferencia DF: luego (c) las circumferencias AI, y AC seràn iguales entre si, lo que no puede ser: luego tampoco el angulo AGC puede ser desigual al angulo DHF; (d) pero los angulos ABC, DEF son mitades de los angulos en los centros: luego son (e) iguales entre si: luego en iguales circulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 30.
(a) 23. P. 1.
(b) 26 P. 3.
(c) axiom. 1.
(d) 20. P. 3.
(e) axiom. 7.

THEOREMA 25. PROPOSICION 28.

En circulos iguales, iguales lineas rectas quitan iguales circumferencias, conviene a saber la mayor a la mayor, y la menor a la menor.

Fig. 31. En los circulos iguales ABC, DEF estèn las lineas rectas iguales AC, DF: digo, que las circumferencias mayores ABC, DEF son iguales entre si, y asimismo las menores AIC, DKF. A los centros G, y H tirense las lineas AG, GC, DH, HF; y porque los circulos son iguales (a) las lineas AG, GC

(a) son iguales a las lineas DH, HF, y la base AC se

1.def.3. supone igual a la base DF: luego (b) el angulo

(b) angulo *AGC* es igual al angulo DHF, que estàn en

8. p. 1. los centros: luego (c) la circumferencia *AIC* es

(c) igual a la circumferencia DKF; pero los circulos

26. p. 3. tambien son iguales: luego (d) los residuos ABC,

(d) DEF son iguales entre si: luego en circulos iguales,

axiom. 3. &c. que es lo que se avia demostrar.

THEOREMA 26, PROPOSICION 29.

En circulos iguales, a iguales circumferencias dadas subtenden iguales lineas rectas.

Fig. 31. En los circulos iguales ABC, DEF ponganse iguales las circumferencias AIC, DKF: digo, que las lineas rectas AC, DF, que las subtenden son iguales entre si. A los centros G, y H tirense las

rec-

rectas AG, GC, DH, HF; y porque la circumferencia AIC es igual a la circumferencia DKF (a) el angulo AGC es igual al angulo DHF, y (b) los lados AG, GC son iguales a los lados DH, HF: luego (c) la base AC es igual a la base DF: luego en circulos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 27. P. 3.
(b) 1. defin. 3
(c) 4. P. 1.

PROBLEMA 4. PROPOSICION 30.

Cortar vna circumferencia dada en dos partes iguales.

Sea la circumferencia dada ABC, que se ha de cortar en dos partes iguales. Tirese la recta AC, y (a) partase por medio en el punto D, y desde el tirese (b) la DB perpendicular a la linea AC: digo, que la recta DB corta la circumferencia ABC por medio en el punto B. Tirense las lineas AB, CB; y porque en los dos triangulos ADB, CDB, los dos lados AD, DB del vno, son iguales a los dos CD, DB del otro, y los angulos comprehendidos rectos: luego (c) la base AB es igual a la base BC: luego (d) la circumferencia BC es igual a la circumferencia AB, y queda cortada la circumferencia ABC en dos partes iguales; que es lo que se avia de hazer.

Fig. 32.
(a) 10. P. 1.
(b) 11. P. 1.
(c) 4. P. 1.
(d) 28. P. 3.

THEO-

THEOREMA 27. PROPOSICION 31.

En qualquier circulo el angulo formado en el semicirculo es recto; pero el formado en el mayor segmento es menor que vn recto, y el formado en el menor segmento es mayor que vn recto, y el angulo del mayor segmento es mayor que vn recto, y el del menor segmento, menor que vn recto.

Fig. 33. En el circulo ABC sobre el diametro AC, formese qualquier angulo en la circumferēcia, como *ABC*: digo lo primero, que es recto. Alarguese la linea *AB* hazia *F*, y tirese la linea *BD* al centro *D*; y porque en el triangulo *BDC* los dos lados *DB*,
(a) *DC* son iguales (a) los angulos *DBC*, *DCB* sobre la
5. P. 1. base son iguales entre si: assimismo en el triangulo *DAB* los angulos *DBA*, *DAB* son iguales entre si: luego el angulo total *ABC* es igual a los dos angulos juntos *DCB* del vn triangulo, y *DAB* del
(b) otro; pero (b) el angulo *CBF* externo, es igual a
32. P. 1. los dos angulos juntos *BCA*, y *BAC* del triangulo *ABC* [que son los mismos que los angulos *DCB*, y
(c) *DAB*:] luego (c) el angulo *ABC* es igual al angu-
ax. 1. (d) lo *CBF*: luego (d) es recto.
10. def. 1 Digo lo segundo, que el angulo como *BAC* formado en el segmento mayor *BAC* es menor, que
(e) vn recto, porque (e) los dos angulos *ABC*, *BAC*
17. P. 1. juntos son menores que dos rectos; pero el angulo

ABC

ABC està demostrado recto: luego el BAC es menor que vn recto.

Digo lo tercero, que el angulo BEC formado en el segmento menor, es mayor que vn recto; porque en el quadrilatero ABEC inscripto en el circulo, los dos angulos opuestos (f) BAC, BEC juntos son iguales a dos rectos; pero el angulo B*A*C està demostrado menor que vn recto: luego el angulo B*E*C su opuesto es mayor que vn recto. (f) 22, P 3.

Digo lo quarto, que el angulo del segmento mayor, comprehendido de la circumferencia BC*A*, y de la linea recta BA es mayor que vn recto: porque el angulo comprehendido de las lineas rectas AB, BC es recto: luego el angulo comprehendido de la linea recta *AB*, y de la circumferencia BC*A* es mayor que vn recto.

Digo lo quinto, que el angulo del menor segmẽto, comprehendido de la circumferencia BEC, y de la recta BC es menor que vn recto: porque el angulo comprehendido de las lineas rectas CB, BF es recto: luego el comprehẽdido de la linea recta BC, y de la circumferencia BEC, es menor que vn recto: luego en qualquier circulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIO.

De aqui se sigue que si vn angulo de qualquier triangulo fuere igual a los otros dos juntos, que serà recto; porque està demostrado, que el angulo ABC es recto, por ser igual a los dos angulos BAC, ACB juntos.

THEO-

THEOREMA 28. PROPOSICION 32.

Si vna linea recta toca vn circulo, y del contacto se tira qualquiera recta que le corte, los angulos que haze la tangente con la secante son iguales a los angulos, que se forman en los segmentos alternos.

Fig. 34. La linea recta *AB* toque al circulo *CDE* en el punto C, y del punto C tirese la recta *CE* secante del circulo: digo, que los angulos que la *CE* haze con la tangente *AB* son iguales a los angulos que estàn en los segmentos alternos; conviene a saber, que el angulo *ACE* es igual al angulo *CGE* formado en el segmento *CGE* [que se llama segmento alterno, respecto del angulo *ACE*] y el angulo *BCE* es igual al angulo *CDE* formado en el segmento
(a) alterno *CDE*. Porque passe lo primero la linea *CE*
18. p. 3. por el centro, y (a) seràn los angulos *ACE*, *BCE*
(b) rectos; pero (b) los angulos *CGE*, *CDE* tambien
31. p. 3. (c) son rectos en los semicirculos: luego (c) el angulo
ax. 12. ACE es igual al angulo CGE, y el BCE al CDE.

Fig. 35. Lo segundo no pass: la linea *CE* por el centro, y tirese la *CF* por el centro, y la *EF*: digo, que el angulo *ACE* es igual al angulo *CGE* en el segmento
(d) alterno, y el *BCE* al *CDE*. Porque en el triangulo
31. p. 3. CE*F* el angulo CE*F* es recto (d) en el semicirculo:
(e) luego (e) los otros dos ECF, EFC juntos son igua-
32. p. 1. (f) les a vn recto; pero (f) el angulo *ACF* tambien es
18. p. 3. rec-

recto, formado de la tangente AC, y del diametro CF: luego (g) el angulo ACF es igual à los dos angulos ECF, EFC juntos, quitese de entrambas partes el angulo ECF comun, y queda (h) el angulo ACE igual al angulo EFC; pero (i) los angulos EFC, CGE son iguales entre si en vn mismo segmento CGFE: luego (g) el angulo ACE es igual al angulo CGE. Y porque del quadrilatero CDEG inscripto en el circulo, los dos angulos opuestos (l) CGE, y CDE juntos, son iguales a dos rectos, y (m) los dos angulos ACE, BCE juntos, son tambien iguales a dos rectos: luego los dos angulos CGE, CDE, son iguales a los dos ACE, BCE; pero el *CGE* està demostrado igual al angulo *ACE*: luego (h) el residuo *CDE* es igual al residuo *BCE*: luego si vna linea recta, &c. que es lo que se avia demostrar.

(g) *axiom. 1.* (h) *axiom. 3.* (i) 21. P. 3. (l) 22. P. 3. (m) 13. P. 1.

PROBLEMA 5. PROPOSICION 33.

Sobre vna linea recta describir vn segmento de circulo, que reciba vn angulo igual à vn angulo rectilineo dado.

Sea dada la linea recta AB, y el angulo rectilineo *C*; se ha de describir sobre la linea recta AB vn segmento de circulo, que reciba vn angulo igual al angulo *C* dado. El angulo dado, ò es agudo, ò recto, ò obtuso. *S*ea lo primero el angulo dado recto, cortese (a) la linea AB por medio en el punto D, y Fig. 36.

(a) 10. P. 1.

del centro D con el semidiametro DA describase el semicirculo AEB, y tirense las lineas rectas AE, BE a qualquier punto de la circumferencia, como E: digo, que el angulo AEB, que està en el segmẽto descrito, es igual al angulo dado, porque el an-
(b) 31. P. 1. gulo AEB està en el semicirculo: luego (b) es recto, y
(c) ax. 12. (c) igual al angulo C recto.

Fig. 37. Sea lo segundo el angulo C agudo: sobre la li-
(d) 23. P. 1. nea recta AB en el punto A hagase (d) el angulo BAD igual al angulo C, y serà el angulo BAD
(e) 11. P. 1. agudo: tirese (e) la AE perpendicular a la AD, y al angulo BAE hagase igual el angulo ABF, y concurra la AE con la BF en el punto F: digo, que del centro F con el semidiametro FA descrito el circulo passarà por B, y el angulo AEB en el segmento AEB es igual al angulo C dado; porque en el triangulo ABF los dos angulos ABF, BAF son
(f) 6. P. 1. iguales: luego (f) los lados FA, FB son iguales: luego del centro F con el semidiametro FA descrito el circulo AEB, passarà por el punto B. Tirese la linea BE; y porque la linea DA es perpen-
(g) Co. 16. P. 3. dicular al diametro AE, la AD (g) es tangente del circulo ABE, y la AB secante: luego (h) el angu-
(h) 32. P. 3. lo BAD es igual al angulo AEB, formado en el segmento alterno; pero el angulo BAD es igual al
(i) axiom. 1. angulo C dado: luego (i) el angulo C tambien es igual al angulo AEB.

Sea

Sea lo tercero el angulo dado H obtuso, hagase (k) con la linea dada AB en el punto A el angulo IAB igual al angulo H, y del punto A tirese la AE perpendicular a la IA, y describase el circulo como en la parte antecedente; tomese qualquier pũto de la circumferencia, como G en el segmento AGB, y tirense las rectas AG, BG: digo, que en el segmento *AGB* el angulo *AGB* es igual al angulo H dado. Porque (l) el angulo IA*B* contenido de la tangente IA, y de la secante *AB* es igual al angulo *AGB*, formado en el segmento alterno; pero el angulo H tambien es igual al angulo *IAB*: luego (m) el angulo H es igual al angulo *AGB*: luego sobre vna linea recta està descrito, &c. que es lo que se avia de hazer. (k) 23. P. 1. (l) 32. P. 3. (m) Axiom. 1.

PROBLEMA 6. PROPOSICION 34.

De vn cirulo dado cortar vn segmento, que reciba vn angulo igual a vn angulo rectilineo dado.

Sea el circulo dado *ABC*, y el angulo rectilineo dado D: se ha de cortar del circulo *ABC* vn segmẽto, que reciba vn angulo igual al angulo D; tirese (a) la linea E*AF* tangente del circulo en el punto *A*, y hagase (b) con la linea EF en el punto *A* el an- Fig. 38 (a) Cor. 16. P. 3. (b) 23. P. 1.

BDC compuesto de los *FDC*, *BDF*, es duplo del angulo total *BAC*.

Fig. 23. Formese de otra suerte el angulo *BDC* en el centro D, y el *BAC* en la circumferencia sobre la misma base *BEC*, y tirese la linea recta *ADF*; y porque el angulo *FDC* está en el centro *D*, y el *FAC* en la circumferencia, el angulo *FDC* es duplo del angulo *FAC*, como está demostrado: por la misma razon el angulo *FDB* es duplo del angulo *FAB*. Siendo pues el angulo total *FDC* duplo del angulo total *FAC*, y el *FDB* parte del vno, y duplo del

(d) Ax. 20. *FAB*, parte del otro: luego (d) quitando el angulo *FDB* del angulo *FDC*; y quitando tambien el angulo *FAB* del angulo *FAC*, quedará el residuo *BDC* duplo del residuo *BAC*: luego el angulo que se forma, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 19. *PROPOSICION* 21.

En vn circulo los angulos que están en vn mismo segmento, son iguales entre si.

Fig. 24. Estén en el segmento *DABC* los angulos *DAC*, *DBC*: digo, que son iguales entre si. Formese el angulo DEC en el centro E; y porquanto los angulos DAC, y DBC en la circumferencia (a) son

(a) 20. p. 3. (b) axiom. 1. mitades del angulo *DEC* en el centro: luego (b) son iguales entre si los angulos DAC, y DBC: luego en vn circulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEO-

THEOREMA 29. PROPOSICION 22.

Los angulos opuestos de las figuras quadrilateras inscriptas en vn circulo, son iguales a dos rectos.

En el circulo *ABC* formese el quadrilatero ABCD de suerte, que todos sus angulos toquen la circumferencia [y esto se llama inscribir vna figura en el circulo:] digo, que qualesquiera dos angulos opuestos, como *ABC*, y *ADC* son iguales a dos rectos. Tirense las lineas rectas *AC*, y *BD*; y porque los angulos *ABD*, *ACD* estàn en vn mismo segmento *ABCD* (a) son iguales entre si. Assimismo los dos angulos DBC, DAC, que estàn en el segmento DABC son iguales entre si: luego el angulo *ABC* [compuesto de los dos *ABD*, y *DBC*] es igual a los dos angulos *ACD*, y *DAC* juntos: añadase a entrambas partes el angulo *ADC*, y quedaràn (b) los dos angulos *ABC*, *ADC* iguales a los tres *ACD*, *DAC*, *ADC*; pero (c) estos tres son iguales a dos rectos: luego tambien los dos angulos opuestos ABC, ADC son iguales a dos rectos, que es lo que se avia de demostrar. De la misma suerte se demuestra, que los dos angulos opuestos BCD, y BAD son iguales a dos rectos: luego los angulos opuestos, &c.

Fig. 25.

(a) 21. P. 3.

(b) axiom. 2.

(c) 32. P. 1.

THEO-

THEOREMA 21. PROPOSICION 23.

Sobre vna linea recta no se podràn constituir dos segmentos de circulos semejantes, y desiguales, y hàzia las mismas partes.

Fig. 16. Porque si es possible sobre la linea recta AB constituyanse dos segmentos de circulos semejantes, y desiguales: conviene a saber *ACB*, y *ADB* hàzia vnas mismas partes, y tirese la linea recta *ACD*, y las rectas *BC*, *BD*. Y por que el segmento *ACB* se supone semejante al segmento ADB, serà (a) el angulo *ACB* externo igual al angulo *ADB* interno, y opuesto; pero (b) esto no puede ser: luego tampoco sobre vna linea recta se podràn constituir, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 10.d.3

(b) 16. P. 1.

THEOREMA 22. PROPOSICION 24.

Semejantes segmentos de circulos constituidos sobre iguales lineas rectas, son iguales entre si.

Fig. 27. Sobre las lineas rectas iguales *AB*, *CD* sean constituidos los segmentos *AEB*, *CFD* semejantes: digo, que son iguales entre si. Porque sobrepuesta la linea *AB* sobre la linea *CD* de suerte, que el punto *A* concurra con el punto *C*, se ajustaran (a) las lineas *AB*, y *CD*, y tambien los segmentos *AEB*, *CFD*. Porque si no se ajustan, ò cairà el segmento

(a) axiom. 8.

to AEB, como el CED lo (b) que no puede ser; ò como el CGD, lo que tampoco puede ser (c) porque vn circulo no corta a otro circulo en mas que dos puntos: luego los segmentos AEB, y CFD convendràn entre si: luego (d) son iguales: luego semejantes segmentos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(b) 23. P. 3.
(c) 10. P. 3.
(d) axiom. 8.

PROBLEMA 3. PROPOSICION 25.

Dado vn segmento de circulo, describir el circulo cuyo segmento es.

Sea el segmento dado ABC, se ha de describir el circulo, cuyo segmento es. Tirense qualesquiera dos lineas rectas AB, BC, y (a) partanse por medio en los puntos D, y E, y dellos (b) tirense las perpendiculares DF, EF: digo, que el punto F, en que concurren las perpendiculares DF, EF, es el centro del circulo que se ha de describir. Porque (c) en la perpendicular DF està el centro deste circulo; tambien està en la perpendicular EF: luego està en el comun concurso, que es el punto F, y dèl se describirà el circulo, que es lo que se avia de hazer.

Fig. 28.
(a) 10. P. 1.
(b) 11. P. 1.
(c) Cor. 1. P. 3.

THEOREMA 23. PROPOSICION 26.

En circulos iguales, iguales angulos insisten sobre igua-

les circumferencias, ò eſtèn formados en los centros, ò en las circumferencias.

Fig. 29. En los circulos iguales ABC,DEF eſtèn formados los angulos AGC, DHF iguales en los centros G, y H: digo, que las circumferencias AIC, DKF ſobre quienes inſiſten, ſon iguales entre ſi. Tirenſe las lineas AB, BC, y DE, FE a qualeſquiera puntos de la circumferencia, como B, y E; tirenſe tambien las rectas AC, DF: y porque en los triangulos AGC, DHF (a) los dos lados AG, GC, ſon iguales a los dos lados DH, HF, y el angulo AGC ſe ſupone igual al angulo DHF: luego (b) la baſe AC es igual a la baſe DF; y porque los angulos ABC, DEF (c) ſon mitades de los angulos AGC, DHF, los angulos B, y E (d) ſon iguales entre ſi: luego (e) el ſegmento AEC es ſemejante al ſegmento DEF, en los quales eſtàn iguales angulos; y eſtàn ſobre iguales lineas rectas AC, DF: luego (f) ſon iguales entre ſi los ſegmentos ABC, DEF, tambien todo el circulo es igual a todo el circulo: luego (g) los reſiduos AIC,DKF ſon iguales entre ſi.

(a) 1. def. 3. (b) 4. P. 1. (c) 20. P. 3. (d) axiom. 7. (e) 10. def. 3 (f) 24. P. 3. (g) axiom. 3.

Sean lo ſegundo iguales los angulos ABC,DEF, formados en las circumferencias: digo, que la circumferencia AIC, es igual a la circumferencia DKF. Porque (h) los angulos ABC,DEF ſon mitades de los angulos AGC, DHF: luego (i) los angulos AGC, DHF ſon tambien iguales: luego las

(h) 20. P. 3. (i) axiom. 6.

las circumferencias AIC, DKF son iguales entre si, como està demostrado: luego en circulos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 24. PROPOSICION 27.

En iguales circulos los angulos que insisten sobre iguales circumferencias, son iguales entre si; ò estèn formados en los centros, ò en las circumferencias.

En los circulos iguales ABC, DEF sobre las circumferencias iguales AC, DF insistan los angulos AGC, DHF formados en los centros, y los ABC, DEF, formados en las circumferencias: digo, que el angulo AGC es igual al angulo DHF, y el ABC al DEF. Porque si el angulo AGC no es igual al angulo DHF, serà vno dellos mayor: sea si es possible mayor el AGC, y a la linea recta AG en el centro G, hagase (a) el angulo AGI igual al angulo DHF: luego (b) la circumferencia AI serà igual a la circumferencia DF; pero la circumferencia AC tambien se suponia igual a la circumferencia DF: luego (c) las circumferencias AI, y AC seràn iguales entre si, lo que no puede ser: luego tampoco el angulo AGC puede ser desigual al angulo DHF; (d) pero los angulos ABC, DEF son mitades de los angulos en los centros: luego son (e) iguales entre si: luego en iguales circulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 30.

(a) 23. p. 1.

(b) 26 p. 3.

(c) axiom. 1.

(d) 20. p. 3.

(e) axiom. 7.

THEOREMA 25. PROPOSICION 28.

En circulos iguales, iguales lineas rectas quitan iguales circumferencias, conviene à saber la mayor a la mayor, y la menor a la menor.

Fig. 31. En los circulos iguales ABC, DEF estèn las lineas rectas iguales AC, DF: digo, que las circumferencias mayores ABC, DEF son iguales entre si, y assimismo las menores AIC, DKF. A los centros G, y H tirense las lineas AG, GC, DH, HF; y porque los circulos son iguales (a) las lineas AG, GC
(a) son iguales a las lineas DH, HF, y la base AC se
1.def.3. supone igual a la base DF: luego (b) el angulo
(b) angulo *AGC* es igual al angulo DHF, que estàn en
8.p.1. los centros: luego (c) la circumferencia *AIC* es
(c) igual a la circumferencia DKF; pero los circulos
26.p.3. tambien son iguales: luego (d) los residuos ABC,
(d) DEF son iguales entre si: luego en circulos igua-
axiom.3. les, &c. que es lo que se avia demostrar.

THEOREMA 26, PROPOSICION 29.

En circulos iguales, a iguales circumferencias dadas subtenden iguales lineas rectas.

Fig. 31. En los circulos iguales ABC, DEF ponganse iguales las circumferencias AIC, DKF: digo, que las lineas rectas AC, DF, que las subtenden son iguales entre si. A los centros G, y H tirense las

rectas AG, GC, DH, HF; y porque la circumferencia AIC es igual a la circumferencia DKF (a) el angulo AGC es igual al angulo DHF, y (b) los lados AG, GC son iguales a los lados DH, HF: luego (c) la base AC es igual a la base DF: luego en circulos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 27. P. 3.
(b) 1. defin. 3
(c) 4. P. 1.

PROBLEMA 4. PROPOSICION 30.

Cortar vna circumferencia dada en dos partes iguales.

Sea la circumferencia dada ABC, que se ha de cortar en dos partes iguales. Tirese la recta AC, y (a) partase por medio en el punto D, y desde el tirese (b) la DB perpendicular a la linea AC: digo, que la recta DB corta la circumferencia ABC por medio en el punto B. Tirense las lineas AB, CB; y porque en los dos triangulos ADB, CDB, los dos lados AD, DB del vno, son iguales a los dos CD, DB del otro, y los angulos comprehendidos rectos: luego (c) la base AB es igual a la base BC: luego (d) la circumferencia BC es igual a la circumferencia AB, y queda cortada la circumferencia ABC en dos partes iguales, que es lo que se avia de hazer.

Fig. 32.
(a) 10. P. 1.
(b) 11. P. 1.
(c) 4. P. 1.
(d) 28. P. 3.

THEO-

THEOREMA 27. PROPOSICION 31.

En qualquier circulo el angulo formado en el semicirculo es recto; pero el formado en el mayor segmento es menor que vn recto, y el formado en el menor segmento es mayor que vn recto, y el angulo del mayor segmento es mayor que vn recto, y el del menor segmento, menor que vn recto.

Fig. 33. En el circulo ABC sobre el diametro AC, formese qualquier angulo en la circumferēcia, como *ABC*: digo lo primero, que es recto. Alarguese la linea *AB* hazia *F*, y tirese la linea *BD* al centro *D*; y porque en el triangulo *BDC* los dos lados *DB*,
(a) 5.P.1. *DC* son iguales (a) los angulos *DBC*, *DCB* sobre la base son iguales entre si: assimismo en el triangulo *DAB* los angulos *DBA*, *DAB* son iguales entre si: luego el angulo total *ABC* es igual a los dos angulos juntos *DCB* del vn triangulo, y *DAB* del
(b) 32.P.1. otro; pero (b) el angulo *CBF* externo, es igual a los dos angulos juntos *BCA*, y *BAC* del triangulo *ABC* [que son los mismos que los angulos *DCB*, y
(c) axiom.1. *DAB*:] luego (c) el angulo *ABC* es igual al angulo *CBF*: luego (d) es recto.
(d) 10.def.1 Digo lo segundo, que el angulo como *BAC* formado en el segmento mayor *BAC* es menor, que
(e) 17.P.1. vn recto, porque (e) los dos angulos *ABC*, *BAC* juntos son menores que dos rectos; pero el angulo

ABC

ABC eſtà demoſtrado recto: luego el BAC es menor que vn recto.

Digo lo tercero, que el angulo BEC formado en el ſegmento menor, es mayor que vn recto; porque en el quadrilatero ABE*C* inſcripto en el circulo, los dos angulos opueſtos (f) BAC, BE*C* juntos ſon iguales a dos rectos; pero el angulo B*AC* eſtà demoſtrado menor que vn recto: luego el angulo B*EC* ſu opueſto es mayor que vn recto. (f) 22, P 3.

Digo lo quarto, que el angulo del ſegmento mayor, comprehendido de la circumferencia BC*A*, y de la linea recta BA es mayor que vn recto: porque el angulo comprehendido de las lineas rectas AB, B*C* es recto: luego el angulo comprehendido de la linea recta *AB*, y de la circumferencia BC*A* es mayor que vn recto.

Digo lo quinto, que el angulo del menor ſegmẽto, comprehendido de la circumferencia BE*C*, y de la recta B*C* es menor que vn recto: porque el angulo comprehendido de las lineas rectas CB, BF es recto: luego el comprehẽdido de la linea recta BC, y de la circumferencia BEC, es menor que vn recto: luego en qualquier circulo, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

COROLARIO.

De aqui ſe ſigue que ſi vn angulo de qualquier triangulo fuere igual a los otros dos juntos, que ſerá recto; porque eſtá demoſtrado, que el angulo ABC es recto, por ſer igual a los dos angulos BAC, ACB juntos.

THEO-

THEOREMA 28. PROPOSICION 32.

Si vna linea recta toca vn circulo, y del contacto se tira qualquiera recta que le corte, los angulos que haze la tangente con la secante son iguales a los angulos, que se forman en los segmentos alternos.

Fig. 34. La linea recta *AB* toque al circulo *CDE* en el punto C, y del punto C tirese la recta *CE* secante del circulo: digo, que los angulos que la *CE* haze con la tangente *AB* son iguales a los angulos que estàn en los segmentos alternos; conviene a saber, que el angulo *ACE* es igual al angulo *CGE* formado en el segmento *CGE* [que se llama segmento alterno, respecto del angulo *ACE*] y el angulo *BCE* es igual al angulo *CDE* formado en el segmento
(a) alterno *CDE*. Porque passe lo primero la linea *CE*
18. P. 3. por el centro, y (a) seràn los angulos *ACE*, *BCE*
(b) rectos; pero (b) los angulos *CGE*, *CDE* tambien
31. P. 3. (c) son rectos en los semicirculos: luego (c) el angulo
ax. 12. ACE es igual al angulo CGE, y el BCE al CDE.

Fig. 35. Lo segundo no passe la linea *CE* por el centro, y tirese la *CF* por el centro, y la *EF*: digo, que el angulo *ACE* es igual al angulo *CGE* en el segmento
(d) alterno, y el *BCE* al *CDE*. Porque en el triangulo
31. P. 3. *CEF* el angulo *CEF* es recto (d) en el semicirculo:
(e) luego (e) los otros dos *ECF*, *EFC* juntos son igua-
32. P. 1. (f) les a vn recto; pero (f) el angulo *ACF* tambien es
18. P. 3.

rec-

recto, formado de la tangente AC, y del diametro CF: luego (g) el angulo ACF es igual à los dos angulos ECF, EFC juntos, quitese de entrambas partes el angulo ECF comun, y queda (h) el angulo ACE igual al angulo EFC; pero (i) los angulos EFC, CGE son iguales entre si en vn mismo segmento CGFE: luego (g) el angulo ACE es igual al angulo CGE. Y porque del quadrilatero CDEG inscripto en el circulo, los dos angulos opuestos (l) CGE, y CDE juntos, son iguales a dos rectos, y (m) los dos angulos ACE, BCE juntos, son tambien iguales a dos rectos: luego los dos angulos CGE, CDE, son iguales a los dos ACE, BCE; pero el *CGE* està demostrado igual al angulo *ACE*: luego (h) el residuo *CDE* es igual al residuo *BCE*: luego si vna linea recta, &c. que es lo que se avià demostrar.

(g) axiom. 1.
(h) axiom. 3.
(i) 21. P. 3.
(l) 22. P. 3.
(m) 13. P. 1.

PROBLEMA 5. PROPOSICION 33.

Sobre vna linea recta describir vn segmento de circulo, que reciba vn angulo igual a vn angulo rectilineo dado.

Fig. 36.

Sea dada la linea recta AB, y el angulo rectilineo *C*; se ha de describir sobre la linea recta AB vn segmento de circulo, que reciba vn angulo igual al angulo *C* dado. El angulo dado, ò es agudo, ò recto, ò obtuso. *S*ea lo primero el angulo dado recto, cortese (a) la linea AB por medio en el punto D, y

(a) 10. P. 1.

P de

del centro D con el semidiametro DA describase el semicirculo AEB, y tirense las lineas rectas AE, BE a qualquier punto de la circunferencia, como E: digo, que el angulo AEB, que està en el segmento descrito, es igual al angulo dado, porque el angulo AEB està en el semicirculo: luego (b) es recto, y (c) igual al angulo C recto.

(b) 31. P. 1. (c) ax. 12.

Fig. 37. Sea lo segundo el angulo C agudo: sobre la linea recta AB en el punto A hagase (d) el angulo BAD igual al angulo C, y serà el angulo BAD agudo: tirese (e) la AE perpendicular a la AD, y al angulo BAE hagase igual el angulo ABF, y concurra la AE con la BF en el punto F: digo, que del centro F con el semidiametro FA descrito el circulo passarà por B, y el angulo AEB en el segmento AEB es igual al angulo C dado; porque en el triangulo ABF los dos angulos ABF, BAF son iguales: luego (f) los lados FA, FB son iguales: luego del centro F con el semidiametro FA descrito el circulo AEB, passarà por el punto B. Tirese la linea BE; y porque la linea DA es perpendicular al diametro AE, la AD (g) es tangente del circulo ABE, y la AB secante: luego (h) el angulo BAD es igual al angulo AEB, formado en el segmento alterno; pero el angulo BAD es igual al angulo C dado: luego (i) el angulo C tambien es igual al angulo AEB.

(d) 23. P. 1. (e) 11. P. 1. (f) 6. P. 1. (g) Co. 16. P. 3. (h) 32. P. 3. (i) Axiom. 1.

Sea

Sea lo tercero el angulo dado H obtuso, y hagase (k) con la linea dada AB en el punto A el angulo IAB igual al angulo H, y del punto A tirese la AE perpendicular a la IA, y describase el circulo como en la parte antecedente; tomese qualquier pũto de la circumferencia, como G en el segmento AGB, y tirense las rectas AG, BG: digo, que en el segmento *AGB* el angulo *AGB* es igual al angulo H dado. Porque (l) el angulo IA*B* contenido de la tangente IA, y de la secante *AB* es igual al angulo *AGB*, formado en el segmento alterno; pero el angulo H tambien es igual al angulo *IAB*: luego (m) el angulo H es igual al angulo *AGB*: luego sobre vna linea recta està descrito, &c. que es lo que se avia de hazer.

(k) 23. P. 1.

(l) 32. P. 3.

(m) Axiom. 1.

PROBLEMA 6. PROPOSICION 34.

De vn cirulo dado cortar vn segmento, que reciba vn angulo igual a vn angulo rectilineo dado.

Sea el circulo dado *ABC*, y el angulo rectilineo dado D: se ha de cortar del circulo *ABC* vn segmẽto, que reciba vn angulo igual al angulo D; tirese (a) la linea E*AF* tangente del circulo en el punto *A*, y hagase (b) con la linea EF en el punto *A* el an-

Fig. 38

(a) Cor. 16. P. 3.

(b) 23. P. 1.

angulo *EAC* igual al angulo dado: digo, que la linea *AC* corta el segmento *ABC*, que recibe el angulo *ABC* igual al angulo D dado. Porque la recta *EF* toca el circulo *ABC* en el punto A, y del contacto A se tirò la secante *AC*, luego (c) el angulo *EAC*, es igual al angulo *ABC* en el segmento alterno, pero el angulo *EAC*, es igual al angulo D: luego el *ABC*, (d) tambien es igual al angulo D: luego del circulo dado se ha cortado vn segmento, &c. que es lo que se auia de hazer.

(c) 32. d. 3.

(d) *axiom.* 1.

THEOREMA 29. PROPOSICION 35.

Si dos lineas rectas se cortan entre si dentro de vn circulo, el rectangulo contenido de los segmentos de la vna es igual al rectangulo contenido de los segmentos de la otra.

Fig. 39. En el circulo *ABCD*, cortense entresi las dos lineas rectas AB, CD en el punto E: digo, que el rectangulo contenido de los segmentos AE, y EB, es igual al rectangulo contenido de los segmentos *CE*, y *ED*: Lo primero, cortense las lineas AB, *CD* en el centro *E*: luego (e) los rectangulos de los segmentos de entrambas, seràn quadrados, y (f) tienen iguales lados, luego (g) son iguales entresi.

(e) 29. *def.* 1

(f) 15. *def.* 1

(g) 46. *p.* 1.

Fig. 40. Lo segundo la linea *CD*, passe por el centro F, y corte por medio à la linea AB en el punto *E*, que no passa por el centro, y tirese la linea FB : y porque la recta *CD* passa por el centro, y corta por medio

medio la linea recta AB, no tirada por el centro, (h) el angulo FEB es recto: y porque la recta CD està cortada en partes iguales en el punto F, y en desiguales en E, (i) el rectangulo contenido de las partes desiguales CE, ED, juntamente con el quadrado de la intermedia FE, es igual al quadrado de la mitad FD, ó de su igual FB, pero (k) el quadrado de la FB es igual à los dos quadrados de las FE, y EB: luego el rectangulo CED, juntamente con el quadrado de la FE, es igual à los dos quadrados de las FE, y *EB*, quitese de entrambas partes el quadrado comun de la *FE*, y quedarà el rectangulo *CED* igual al quadrado de la *EB*; pero el quadrado de la *EB*, es el rectangulo *AEB* por ser iguales los segmentos: luego el rectangulo contenido de los segmentos *AE*, EB, es igual al rectangulo contenido de los segmentos, EC, y ED.

(h) 3. P. 3.

(i) 5. P. 2.

(k) 47. P. 1.

Lo tercero, la linea CD, passe por el centro F, y corte à la linea AB, que no passa por el centro en partes desiguales en el punto *E*. Cortese (l) AB por medio en el punto G, tirese la FG, y serà (h) el angulo FGB recto; y porque la recta CD esta cortada en partes iguales en el punto F, y en desiguales en *E*, (i) el rectangulo *CED* de las partes desiguales, juntamente con el quadrado de la intermedia *FE*, es igual al quadrado de la mitad FD, ó de su igual FB; pero (k) el quadrado de la *FE* es igual à los dos quadrados de las FG, y *GE*: luego tam-

Fig. 41.

(l) 10. P. 1.

(m) 47. P. 1. tambien el rectangulo CED, juntamente con los dos quadrados de las FG, y GE es igual al quadrado de la FB; pero (m) el quadrado de la FB es igual a los dos quadrados de las FG, y GB: luego el rectangulo CED con los dos quadrados de las FG, y GE es igual a los dos quadrados de las FG, y GB; quitese de entrambas partes el comun quadrado de la FG, y quedarà el rectangulo CED con el quadrado de la GE igual al quadrado de la linea

(n) 5. P. 2. GB; pero (n) porque la linea AB està cortada en partes iguales en el punto G, y en desiguales en E, el rectangulo AEB de las partes desiguales, juntamente con el quadrado de la intermedia GE es

(o) axiom. 1. igual al quadrado de la mitad GB: luego (o) el rectangulo CED con el quadrado de la GE es igual al rectangulo AEB con el quadrado de la GE; quitese de entrambas partes el quadrado co-

(p) axiom. 3. mun de la GE, y quedarà (p) el rectangulo de los segmentos CE, y ED igual al rectangulo de los segmentos AE, y EB.

Fig. 42. Finalmente ninguna de las lineas AB, CD passe por el centro F, y tirese por el, y por E la recta GH: luego por la tercera parte desta proposicion el rectangulo AEB es igual al rectangulo GEH. Assimismo el rectangulo CED es igual al rec-

(q) axiom. 1. tangulo GEH: luego (q) el rectangulo AEB es igual al rectangulo CED: luego si dos lineas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEO-

THEOREMA 30. PROPOSICION 36.

Si fuera de vn circulo se toma vn punto, y desde él caen dos lineas rectas al circulo, la vna secante, y la otra tangente; el rectangulo contenido de toda la secante, y de su parte tomada entre el punto, y la circumferencia convexa es igual al quadrado de la tangente.

Fuera del circulo *ABC* tomese el punto D, y desde él tirese la linea *DA* secante, y la *DB* tangente: digo, que el rectangulo contenido de la *AD*, y DC es igual al quadrado de la *BD*. Fig. 43.

Lo primero, la linea *DA* passe por el centro E, y tirese la linea *BE*; y porque la recta *AC* está cortada por medio en E, y le está añadida la recta CD: luego (a) el rectangulo contenido de la *AD*, y DC con el quadrado de la mitad *CE* es igual al quadrado de la *DE*; pero el quadrado de la *CE* es igual al quadrado de la BE por ser iguales las CE, BE: luego el rectangulo *ADC*, juntamente con el quadrado de la BE es igual al quadrado de la *DE*; pero (b) el quadrado de la *DE* es igual a los dos quadrados de la DB, y BE; por ser el angulo EBD recto (c) formado de la tangente, y del radio: luego el rectangulo *ADC* (d) juntamente con el quadrado de la BE es igual a los dos quadrados de las lineas DB, y BE: quitese de entrambas partes el quadrado comun de la BE, y (e) quedará el rectangulo *ADC* igual al quadrado de la linea DB.

(a) 6. P. 2.
(b) 47. P. 1.
(c) 18. P. 3.
(d) Axiom. 1.
(e) Axiom. 3.

Lo

Fig.44. Lo ſegundo, la recta DA, no paſſe por el centro, y del centro E ſobre la linea CA, (f) tireſe la perpendicular EF, que cortarà (g) la linea CA por medio en el punto *F*: tirenſe tambien las lineas CE, DE, BE: y porque la linea CA eſtà cortada por medio en el punto F, y le eſtà añadida la CD: luego (h) el rectangulo ADC juntamente con el quadrado de la CF, es igual al quadrado de la linea *DF*: añadaſe à entrambas partes el quadrado comun de la *EF*, y quedarà (i) el rectangulo ADC juntamente con los dos quadrados de las *CF*, y EF, ò (k) con el quadrado de la linea CE, ò de la *EB* ſu igual, igual à los dos quadrados de las *DF*, y *EF*: pero (k) los dos quadrados de las *DF*, y *EF*, ſon iguales al quadrado de la linea DE: luego el rectangulo ADC, juntamente con el quadrado de la EB, es igual al quadrado de la DE; pero el quadrado de la DE (k) es igual a los dos quadrados de las lineas DB, y EB: luego el rectangulo ADC, juntamente con el quadrado de la EB, es igual a los dos quadrados de las lineas DB, y EB: quiteſe de entrambas partes el quadrado comun de la EB, y quedarà el rectangulo contenido de la AD, y *DC*, igual al quadrado de la tangente DB: luego ſi fuera de vn circulo, ſe toma vn punto, &c. que es lo que ſe auia de demoſtrar.

(f) 12.P.1.
(g) 3.P.3.
(h) 9.P.2.
(i) axiom.1.
(k) 47.P.1.

CO-

COROLARIO 1.

De aqui se sigue, que si desde vn punto fuera del circulo se tiraren algunas lineas rectas, como DCA, DEF, &c. que corten al circulo, que los rectangulos contenidos de las AD, DC, y de las FD, DE, &c. son iguales entre si, porque cada rectangulo es igual al quadrado de la tangente DB. Fig. 45.

COROLARIO 2.

Siguese lo segundo, que si desde el punto D se tiran dos tangentes del circulo, como las DB, y DG, que son iguales entre si; porque los quadrados de las tangentes DB, y DG (a) son iguales al rectangulo ADC: luego tambien iguales entre si: luego (b) la linea DB es igual a la linea DG. Fig. 45. (a) 36. P. 3. (b) 46. P. 1.

COROLARIO 3.

Siguese lo tercero, que desde vn mismo punto D, no se pueden tirar mas que dos tangentes al mismo circulo; porque si puede aver mas que dos tangētes, como DB, DE, DG, ellas han de ser iguales entre si por el Corolar. anteced. lo que no puede ser, porque tirada (c) la linea recta DF al centro F, la linea DE està demostrada menor que la DB. Fig. 46. (c) 8. P. 3.

COROLARIO 4.

Siguese lo quarto, que si desde vn mismo punto D cayeren dos iguales lineas rectas en la circumferencia del circulo, como las DB, DG, y la vna fuere tangente, tambien la otra serà tangente. Porque tiradas las lineas rectas BF, GF, los dos lados DB, BF son iguales a los lados DG, GF, y la base DF es comun: luego (d) el angulo DBF es igual al angulo DGF; pero (e) el angulo DBF es recto, si la DB es tangente: luego tambien el DGF es recto: luego (f) la DG tambien es tangente. Fig. 46. (d) 8. P. 1. (e) 18. P. 3. (f) 16. P. 3.

THEOREMA 31. PROPOSICION 37.

Si fuera de vn circulo se toma vn punto, y desde èl caen

dos lineas rectas al circulo, la vna secante, y la otra que llegue a su circumferencia, y el rectangulo contenido de toda la secante, y de su parte tomada entre el punto, y la circumferencia convexa fuere igual al quadrado de la que llega a la circumferencia, esta serà tangente del dicho circulo.

Fig. 47. Del punto D caygan al circulo ABC la linea DA, que le corte, y la linea DB, que solamente llegue a su circumferencia: si el rectangulo contenido de la AD, y DC fuere igual al quadrado de la DB: digo, que la linea DB es tangente del circulo ABC.

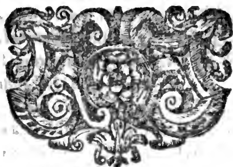
(a) 17. P. 3. (b) 18. P. 3. (c) 36. P. 3. (d) axiom. 1. (e) 46. P. 1. (f) 8. P. 1. (g) 16. P. 3.

Lo primero, la linea DA passe por el centro E, y desde el punto D tirense (a) la recta DF tangente del circulo ABC, y las BE, FE: y porque la DF toca al circulo, y del contacto F se tiró la FE al centro (b) el angulo DFE es recto; y porque la DF es tangente del circulo ABC, y la DA secante: luego (c) el rectangulo ADC es igual al quadrado de la DF; pero el mismo rectangulo ADC se supone igual al quadrado de la DB: luego (d) los quadrados de la DB, y DF son iguales entre si: luego (e) la linea DB es igual a la linea DF; y porque en los dos triangulos DBE, DFE los dos lados DB, BE son iguales a los dos lados DF, FE, y la base DE comun: luego (f) el angulo DBE es igual al angulo DFE; pero el angulo DFE està demostrado, que es recto: luego el DBE tambien es recto: luego (g) la DB es tangente del circulo ABC.

Lo

Lo segundo, no passe la linea DA por el centro E; tirese la recta DE, y demuestrase, como en la parte antecedente, que el angulo DFE es recto, y que los quadrados de las DF, y DB son iguales, y que las mismas lineas DB, y DF son iguales, y que el angulo *DBE* es recto: luego (h) la linea *DB* es tangente del circulo ABC: luego si fuera de vn circulo, &c. que es lo que se avia de demostrar. *Fig.* 48. (h) 16. *P.* 3.

FIN DEL LIBRO TERCERO.



LIBRO QVARTO
DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EUCLIDES.

DEFINICIONES.

1 Na figura rectilinea se dize inscribirse en otra rectilinea, quando todos los angulos de la que se inscribe, tocan todos los lados de la figura en que se inscribe: *como la figura DEF se dize inscripta en la figura ABC.* Fig. 1.

2 Vna figura se dize circumscribirse a otra figura, quando todos los lados de la que se circumscribe, tocan todos los angulos de la figura a quien se circumscribe, *como la figura ABC se dize circumscripta a la figura DEF.* Fig. 1.

3 Vna figura rectilinea se dize inscribirse en vn circulo, quando todos los angulos de la que se inscribe tocan la circũferencia del circulo: *como la figura rectilinea ABC se dize inscripta en el circulo.* Fig. 3.

4 Vna figura rectilinea se dize circumscribirse a vn

vn circulo, quando todos los lados de la que se circumscribe tocan la circumferencia del circulo: *como la figura rectilinea ABC.* Fig. 5.

5 El circulo se dize inscribirse en vna figura rectilinea, quando su circumferencia toca todos los lados de la figura a quien se inscribe.

6 El circulo se dize circumscribirse a vna figura rectilinea, quando su circumferencia toca todos los angulos de la figura à quien se circumscribe.

7 Vna linea recta se dize acomodarse en vn circulo, quando sus extremos tocan la circumferēcia.

PROBLEMA I. PROPOSICION I.

En vn circulo dado acomodar vna linea recta igual a vna recta dada, que no sea mayor que el diametro.

En el circulo dado ABC se ha de acomodar vna linea recta igual a la recta dada D, que no sea mayor que el diametro, porque (a) el diametro es la mayor linea en el circulo. Tirese el diametro BC, y si la recta D es igual al diametro BC, està hecho lo que se propone. Pero si la BC es mayor q̄ la D, cortese (b) de la BC la BE igual a la D, y del cētro B con el semidiametro BE describase el circulo EAF, que corta al circulo ABC en el punto A; tirese la linea AB: digo, que la AB acomodada en el circulo ABC es igual a la linea D; porque la linea AB (c) es igual a la EB, tambiē la linea D es igual a la EB por la construcciō: luego las lineas (d) *AB*, y Fig. 2. (a) 15. P. 3. (b) 3. P. 1. (c) 15. def. (d) axiom. 1.

son iguales entre si: luego en el circulo dado ABC, &c. que es lo que se avia de hazer.

PROBLEMA 2. PROPOSICION 2.

En vn circulo dado inscribir vn triangulo equiangulo a vn triangulo dado.

Fig. 3. En el circulo dado ABC se ha de inscribir vn triangulo equiangulo al triangulo dado *DEF*. Tirese (a) la tangente GH, y al contacto A formese (b) el angulo GAB igual al angulo F, y el angulo HAC igual al angulo E; tirese la recta BC: digo, que el triangulo ABC inscripto en el circulo es equiangulo al triangulo *DEF*. Porque al circulo ABC toca la recta GA, y del contacto A està tirada la secante AB: luego (c) el angulo GAB es igual al angulo AC*B*, que està en el segmento alterno; pero el angulo GA*B* se hizo igual al angulo F: luego (d) el angulo AC*B* es igual al angulo F. Assimismo porque (e) el angulo HAC es igual al angulo A*B*C, y el angulo E igual al angulo HAC: luego el angulo A*B*C es igual al angulo E: luego (f) el tercero *BAC* es igual al tercero *EDF*: luego en el circulo dado està inscripto el triangulo *ABC* equiangulo al triangulo dado *DEF*, que es lo que se avia de hazer.

(a) 16. P. 3.
(b) 23. P. 1.
(c) 32. P. 3.
(d) axiom. 1.
(e) 32. P. 3.
(f) 32. P. 1.

PRO-

PROBLEMA 3. PROPOSICION 3.

A vn circulo dado circumscribir vn triangulo equiangulo a vn triangulo dado.

Al circulo dado *ABC* se ha de circumscribir vn triangulo equiangulo al triangulo dado *DEF*: alarguese la linea EF a vna, y otra parte hàzia G, y H, y del centro I tirense las lineas (a) AI, I*B*, formando el angulo *AIB* igual al angulo *DEG*, y desde el mismo centro tirese la IC, formãdo el angulo *CIB* igual al angulo *DFH*, y por los puntos *A*, *B*, *C* tirense (b) las tangentes LK, LM, KM: digo, que el triangulo KLM (c) circumscripto al circulo *ABC*, es equiangulo al triangulo *DEF*. Porque (d) los quatro angulos del quadrilatero *AIBL* son iguales a quatro rectos; pero (e) los angulos *IAL*, *IBL* son dos rectos: luego los angulos *AIB*, *ALB* son iguales à dos rectos. Tambien (f) los dos angulos *DEF*, *DEG* son iguales a dos rectos: luego (g) los dos angulos *AIB*, *ALB* son iguales a los dos angulos *DEF*, *DEG*; pero el angulo *AIB* se hizo igual al *DEG*: luego el *ALB* es igual al *DEF*. Assimismo se demuestra, que el angulo *BMC* es igual al angulo *DFE*: luego el tercer angulo LKM (h) es igual al tercer angulo *EDF*: luego al circulo *ABC* se ha circumscripto el trianguloKLM equiángulo, &c. que es lo que se avia de hazer.

Fig. 4.
(a) 23. P. 1.
(b) 16. P. 3.
(c) 4. def. 4.
(d) Cor. 32. P. 1.
(e) 18. P. 3.
(f) 13. P. 1.
(g) axiom. 1.
(h) 32. P. 1.

PRO-

PROBLEMA 4. PROPOSICION 4.

En vn triangulo dado inscribir vn circulo.

Fig. 5. En el triangulo dado ABC se ha de inscribir vn
(a) circulo; cortense (a) los angulos ABC, ACB por
9. P. 1. (b) medio con las lineas BD, CD, que concurren en
12. P. 1. el punto D, y desde èl tirense (b) a los lados del triangulo, las perpendiculares DE, DF, DG: digo, que el circulo descripto del punto D con la distancia DE passarà por los puntos F, y G, y estarà inscripto en el triangulo dado. Porque en los dos triangulos DBE, DBF los dos angulos DBE, DBF son iguales por la construccion, y los DEB, DFB rectos, y el lado BD, que se opone a iguales angulos, es comun a entrambos triangulos: luego
(c) (c) los demàs lados opuestos a iguales angulos, son
26. P. 1. iguales entre si, el lado DE igual al lado DF. Assimismo se demuestra, que la linea DG es igual a la linea DF en los triangulos DCF, y DCG: luego las perpendiculares DE, DF, DG son iguales entre si, y el circulo descripto del punto D con el semidiametro DE, passarà por los puntos E, F, G:
(d) luego (d) el circulo EFG està inscripto en el trià-
5. def. 4. gulo dado ABC, que es lo que se avia de hazer.

PRO-

PROBLEMA 5. PROPOSICION 5.

A vn triangulo dado circumſcribir vn circulo.

Al triangulo dado ABC ſe ha de circumſcribir vn circulo; cortenſe (a) los lados AB, AC por medio en los puntos D, y E; tirenſe (b) las perpendiculares DF, EF, y deſde el punto F donde concurren, con la diſtancia FA deſcribaſe el circulo *ABC*: digo, que paſſarà por los puntos *A*, *B*, y *C*: tirenſe las lineas FA, F*B*, FC; y porque en los triangulos ADF, *B*DF los dos lados AD, DF ſon iguales a los lados *BD*, *DF*, y los angulos *ADF*, *BDF* rectos: luego (c) la baſe FA es igual a la baſe *FB*. Aſsimiſmo ſe demueſtra, que la baſe FC es igual a la baſe FA en los triangulos AEF, CEF: luego las tres rectas *FA*, *FB*, *FC* ſon iguales entre ſi, y del punto *F* con la diſtancia *FA* deſcripto el circulo, paſſarà por los puntos *A*, *B*, y *C*: luego al triangulo dado *ABC*, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

Fig. 6.
(a) 10. P. 1.
(b) 11. P. 1.
(c) 4. P. 1.

PROBLEMA 6. PROPOSICION 6.

En vn circulo dado inſcribir vn quadrado.

En el circulo dado *ABCD* ſe ha de inſcribir vn quadrado; tirenſe (a) los diametros *BD*, y *AC* en angulos rectos, y las rectas *AB*, *BC*, *CD*, *DA*: digo,

Fig. 7.
(a) 11. P. 1.

go que ABCD,es quadrado inscripto en el circu-
(b) lo dado;porque los quatro angulos en el centro E
26.P.3. son rectos: luego (b) las circumferencias AB, BC,
(c) CD,DA,sõ iguales entre si,y(c)las rectas AB,BC,
29.P.3. (d) CD,DA,tambien son iguales entre si;pero los an-
31.P.3. gulos ABC,BCD,CDA,*DAB* son rectos(d)por-
(e) que estàn en los semicirculos:luego (e) el quadri-
29.def.1 latero ABCD,es quadrado:luego en el circulo da-
do,&c,que es lo que se avia de hazer.

PROBLEMA 7. PROPOSICION 7.

A vn circulo dado circumscribir vn quadrado.

Al circulo dado ABCD, se ha de circumscribir
Fig. 8. vn quadrado:tirense(a)dos diametros AC,BD,en
(a) 11.P.1. angulos rectos,y por los puntos A,B,C,D, tirense
(b) las tangentes FG,FH,HI,IG, que concurriràn
16.P.3. en los puntos F,G,I,H : Digo, que el quadrilatero
GFHI es quadrado,y està circumscripto al circulo
(c) dado;porque(c) los angulos FBD, AED,GDB,
18.P.3. son rectos:luego (d) las rectas FH, AC,GI,son pa-
(d) 28.P.1. ralelas entre si: assimismo las FG,BD,HI, son pa-
ralelas:luego GFHI,es vn paralelogrammo ; pero
(e) todos los lados sõ iguales entre si(e)por ser iguales
34.P.1. al diametro,y los angulos son rectos , por ser igua-
les à los angulos en el centro: luego(f) el paralelo-
(f) 29.def.1 grammoGFHI,es quadrado:luego al circulo dado,
&c. que es lo que se auia de hazer.

SCHO-

SCHOLIO.

Vn quadrado circumscripto al circulo, es duplo del quadrado inscripto en el mismo circulo: Porque el quadrado de la BD, ò de la FG (su igual, esto es el quadrado circumscripto FI, es igual (a) à los dos quadrados de las BA, y AD: pero ellos son iguales entre si, luego es duplo del vno, esto es del quadrado inscripto. (a) 47. P. I.

PROBLEMA 8. PROPOSICION 8.

Inscribir vn circulo èn vn quadrado dado.

En el quadrado dado *ABCD*, se ha de inscribir vn circulo: Cortese (a) cada vno de los lados *AB*, Fig. 9.
BC, *CD*, *DA* por medio en los pũtos E, F, G, H, y ti- (a) 10. P. I.
rẽse las rectas EG, HF, q̃ se cortaràn en el punto I: *Digo*, que el circulo descripto del pũto I, cõ la distancia *IE*, passarà por los demàs pũtos FGH, y estarà inscripto en el quadrado; porque de iguales lados, las mitades AH, *BF*, son iguales, y paralelas: luego la linea AB, tambien es (b) igual, y paralela à (b)
la linea HF: Assimismo la linea DC, es igual, y para- 33. P. I.
lela a la linea HF. Iten, las lineas AD, BC, son iguales, y paralelas a la linea *EG*: luego *AI*, BI, CI, DI, son paralelogrammos, y (c) las rectas *IE*, *IF*, IG, *IH*, son 34. P. I.
iguales à sus lados opuestos *AH*, EB, DH, AE; pero estos son iguales entre si por ser mitades de iguales lados: luego tãbien las lineas *IE*, *IF*, IG, *IH*, son iguales entre si: luego del punto I, descripto vn circulo cõ la distãcia *IE*, passarà por los demàs puntos (d)
F, G, H; pero tambiẽ (d) toca las lineas AD, AB, BC, 16. P. 3. (e)
CD, porque (e) la HF, es perpendicular a las AD, BC, 29. P. I.
y la EG, à las AB, DC: luego (f) en el quadrado dado (f)
ABCD, està descripto vn circulo, que es lo que se 5. def. 3.
auia de hazer.

PROBLEMA 9. PROPOSICION 9.

Circumſcribir vn circulo a vn quadrado dado.

Fig. 10. Al quadrado dado ABCD ſe ha de circumſcri- vn circulo: tirenſe los diametros AC, BD, que ſe cortaràn en el punto E: digo, que el circulo deſcripto del punto E con la diſtancia EA paſſarà

(a) 5. P. 1. tambien por los puntos B, C, D: Por que por ſer
(b) 29. d f. 1 los lados AB, AD iguales (a) los angulos ABD,
(c) 32. P. 1. ADB ſobre la baſe BD ſon iguales; pero (b) el angulo BAD es recto: luego (c) los angulos ABD, ADB ſon ſemirectos. Aſsimiſmo ſe demueſtra, que los demàs angulos ſobre las baſes BD, y AC ſon ſemirectos: luego en el triangulo EAD, los angulos

(d) 6. P. 1. los EAD, EDA ſon iguales entre ſi, y (d) las lineas EA, ED ſon iguales. Aſsimiſmo ſe demueſtra, que las lineas EC, EB ſon iguales a las EA, ED: luego del punto E con la diſtancia EA deſcripto vn circulo paſſarà por los demàs puntos B, C, D, luego al quadrado dado, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

PROBLEMA 10. PROPOSICION 10.

Formar vn triangulo iſoſceles, cuyos angulos ſobre la baſe ſean duplos del angulo vertical.

Fig. 11. Tomeſe qualquier linea recta, como AB, y cor-
(a) 11. P. 2. teſe (a) en el punto C, de manera, que el rectangulo

gulo de la AB,y de la BC ſean iguales al quadrado de la AC,y del punto A con la diſtancia AB deſcribaſe el circulo BDE,y acomodeſe (b) en èl la recta BD igual a la AC, y tireſe la recta AD: digo, que en el triangulo iſoſceles ABD, los angulos ABD, ADB ſobre la baſe ſon duplos del angulo vertical A. Tireſe la recta CD, y al triangulo ACD circumſcribaſe el circulo ACDE;y porque el rectangulo *ABC* es igual al quadrado de la *AC*,ó de ſu igual BD, y la *BA* corta al circulo *ACDE*, y la BD llega a ſu circumferencia: luego (c) la linea BD es tangente del circulo *ACDE*; y porque la BD toca al circulo *ACDE* en D,y deſde el contacto eſtà tirada la ſecante DC: luego (d) el angulo *BDC* es igual al angulo *DAC*, que eſtà en el ſegmento alterno; añadaſe a entrambas partes el angulo *CDA*, y quedarà el angulo BD*A* igual a los dos angulos *DAC*,y *CDA*;pero(e) el angulo *ABD* es igual al angulo *BDA*: luego el angulo *ABD* tambien es igual a los dos angulos *DAC*, *CDA*: tambien (f) el angulo externo *DCB* es igual a los dos angulos *DAC* , *CDA*: luego los angulos (g) *ABD*, DCB ſon iguales: luego las (h) lineas BD, CD ſon iguales; pero la BD es igual a la AC por la conſtruccion: luego la linea CD tambien es igual a la linea *AC*, y (i) los angulos *DAC*, *CDA* ſobre la baſe *A*D ſon iguales entre ſi; pero el angulo ADB es igual a los dos angulos DAC, CDA iguales: lue-

(b) 1. P. 4.
(c) 37. P. 3.
(d) 32. P. 3.
(e) 5. P. 1.
(f) 32. P. 1.
(g) Axiom. 1.
(h) 6. P. 1.
(i) 5. P. 1.

luego es duplo del angulo A: luego tambien el angulo ABD su igual es duplo del mismo angulo A: luego se ha formado el triangulo Isosceles ABD, cuyos angulos sobre la base BD, son duplos del angulo vertical A, que es lo que se auia de hazer.

COROLARIO.

Fig. 11. De aqui se sigue, que el angulo vertical BAD, es la quinta parte de dos rectos; porque los tres angulos del triangulo ABD, son iguales á dos rectos, ò á cinco quintas partes de dos rectos; y de los angulos sobre la base ABD, ADB, cada vno es dos quintas partes de dos rectos: ò el angulo vertical BAD, es igual a dos quintas partes de vn recto, y cada vno de los angulos sobre la base à quatro quintas partes de vn recto: porque todos tres son iguales á dos rectos, ò à diez quintas partes de vn recto.

PROBLEMA 11. PROPOSICION 11.

En vn circulo dado inscribir vn pentagono equilatero, y equiangulo.

En el circulo dado *ABC*, se ha de inscribir vn
Fig. 12. y 13. pentangono equilatero, y equiangulo: Formese
(a) 10. P. 4. (a) el triangulo Isosceles GFH, cuyos angulos sobre la base GH, sean duplos del angulo vertical F,
(b) 2. P. 4. y inscribase (b) en el circulo *ABC*, el triangulo ACD equiangulo al triangulo FGH, partanse (c)
(c) 9. P. 1. los angulos *ACD*, *ADC* por medio con las rectas CE; *DB*, y tirense las rectas *AB*, *BC*, *DE*, *EA*: digo, que el pentagono, que està inscripto en el circulo dado, es equilatero, y equiangulo: Porque los angulos *ACD*, *ADC*, son duplos del angulo vertical *CAD* por la construccion, y estàn partidos por medio:

dio:luego los angulos *CAD*, *CDB*, *BDA*, *ACE*, *ECD*, son iguales entre si; y (d) las circumferencias *DC*, *BC*, *BA*, *AE*, *ED*, son iguales, y tambien (e) las rectas *AB*, BC, *CD*, DE, EA, son iguales entre si: luego el pentagono es equilatero; y porque la circumferencia AB, es igual a la circumferencia DE, añadase à entrambas partes la circumferencia BCD, y quedarà la circumferencia ABCD, igual à la circumferencia EDCB; pero a la circumferencia ABCD, insiste el angulo AED, y à la EDC*B*, el angulo *B*AE: luego (f) los angulos AED, *B*AE, son iguales entre si. Assimismo se demuestra, que los angulos ABC, BCD, CDE, son iguales al angulo BAE: luego el pentagono ABCDE, es equiàgulo: luego en el circulo dado, &c. que es lo que se auia de hazer.

(d) 26. P. 3.

29. P. 3.

(f) 27. P. 3.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que el angulo del Pentagono equilatero y equiangulo, contiene tres quintas partes de dos rectos, ò seis quintas partes de vn recto; porque el angulo del pentagono, como BAE, consta de tres angulos BAC, CAD, DAE, iguales entre si, que insisten a iguales circunferencias BC, CD, DE, pero està demostrado en el Corol. de la prop. ant. que el angulo CAD es la quinta parte de dos rectos, ò dos quintas partes de vn recto: luego el angulo BAE, es igual a tres quintas partes de dos rectos, ò a seis de vn recto.

SCHOLIO.

Otro modo mas facil para inscribir vn pentagono equilatero, y equiangulo en vn circulo dado. Fig. 14.

En el circulo dado EBD, tirense los diametros ED, BF en angulos rectos, y cortese el semidiametro AD por medio en el punto C, tirese la recta BC, y de la CE, cortese la CG, igual à la BC, tirese la BG: demuestrase en el lib. 13. de Eucl. que la recta GB, es el lado del Pentagono equilatero, y equiangulo, que se puede inscribir en el circulo dado, y la linea AG, lado del decagono equilatero, y equiangulo en el mismo circulo dado.

Quan-

Fig. 15. *Quando se propone vna linea recta como la AB, y que se describa sobre ella*
(g) *vn pentagono equilatero, y equiangulo, se harà deste modo: Cortese (g) la linea*
11. P. 2. *AB en el punto C de manera, que el rectangulo de la AB, y de la BC sea igual al quadrado de la AC; alarguese la AB à entrambas partes, y cortense las AD, BE iguales a la AC; y desde los puntos D, y A con la distancia AB describanse dos arcos, que se cortaràn en el punto F. Assimismo de los puntos B, y E con la misma distancia AB describanse otros dos arcos, que se cortaràn en el punto G, y de los puntos F, y G con la misma distancia otros dos, que se cortaràn en el punto H, tirense las rectas AF, FH, HG, GB: digo, que el pentagono AFHGB es equilatero, y equiangulo: que sea equilatero es manifiesto por la construcciō: tambien es equiangulo; porque tirada la recta DF està demostrado en el Corol. 10. P. 4. que el angulo DAF es igual a dos quintas partes de dos rectos [porque DFA es isosceles, cuya base AD es igual al segmento mayor AC:] luego el residuo de dos rectos, que es el angulo FAB, es el angulo del pentagono por el Cor. 11. P. 4. Assimismo se demuestra, que el angulo GBA es el angulo del pentagono, y los demàs F, H, G.*

PROBLEMA 12. *PROPOSICION* 12.

Circumscribir vn pentagono equilatero, y equiangulo a vn circulo dado.

Fig. 16. Al circulo dado ABC se ha de circumscribir vn pentangono equilatero, y equiangulo: inscribase
(a) (a) en el circulo dado el pentagono ABCDE equila-
11. P. 4. tero, y equiangulo, y del centro F tirense las rectas FA, FB, FC, FD, FE, y a ellas (b) las perpendicula-
(b) 11. P. 1. res GH, HI, IK, KL, LG, que concurriràn en los
(c) puntos G, H, I, K, L, y (c) tocaràn al circulo da-
16. P. 3. do: digo, que el pentagono GHIKL, que està (d)
(d) 4. def. 4. circumscripto al circulo dado, es equilatero, y equiangulo. Porque desde el punto H estàn tiradas
(e) Cor. 2. 36 dos tangentes HA, HB: luego (e) son iguales entre
P. 3. si,

si;y porque en los dos triangulos AFH, BFH, los dos lados AF,FH del vno,son iguales a los dos lados BF,FH del otro,y la base AH, igual a la base BH:luego (f) el angulo *AFH*, es igual al angulo *BFH*, y el *AHF*, igual al *BHF*:luego el angulo *AFB*,es duplo del angulo *BFH*, y el angulo AHB, duplo del angulo *BHF*. Assimismo se demuestra, que el angulo *BFC*,es duplo del angulo *BFI*, y el angulo *BIC*,duplo del angulo *BIF*: y porque (g) los angulos *AFB*,*BFC*, en el centro estàn sobre iguales arcos *AB*, *BC*,son iguales entre si:luego sus mitades,que son los angulos BFH,BFI,son iguales; y porque en los triangulos BFH,IFB, los dos angulos BFH,HBF del vno,son iguales a los dos angulos BFI, IBF del otro,y el lado BF comun,adiacente a los angulos iguales:luego(h)la linea BH,es igual a la linea BI,y el angulo BHF igual al angulo BIF: luego la linea HI,es dupla de la linea HB: assimismo se demuestra,que la linea GH,es dupla de la linea HA; pero està demostrado,que las lineas HA, HB, son iguales:luego (i) sus duplas HI, HG, son tambien iguales: de la misma suerte se demuestra, que las IK,KL,LG,son iguales a las HI,GH:luego el pentagono circumscripto es equilatero, porque està demostrado,que el angulo BHF, es igual al angulo BIF,y que son mitades de los angulos BHA, BIC; luego(i)sus duplos BHA,BIC, son iguales entre si: de la misma manera se demuestra, que los demàs

(f) 8.P.1.

(g) 27.P.3.

(h) 26.P.3.

(i) 6.axio.1.

màs angulos IKL, KLG, LGH, ſon iguales à los angulos BHA, BIC, luego el pentagono circumſcripto, es equiangulo: luego ſe ha circumſcripto vn pentagono, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

COROLARIO.

De aqui ſe ſigue, que ſi en vn circulo ſe inſcribe vna figura equilatera, y equiangula, y por ſus angulos ſe tiraren tangentes del circulo, que ſe circumſcribirá al circulo vna figura ſemejante equilatera, y equiangula a la figura inſcripta: porque de la miſma ſuerte como en el pentagono, ſiempre ſe demoſtrará, que los lados GH, HI, ſon iguales, y tambien los angulos BHA, BIC, iguales, &c.

PROBLEMA 13. PROPOSICION 13.

Inſcribir vn circulo en vn pentagono equilatero, y equiangulo.

Fig. 17. En el pentagono equilatero, y equiangulo ABCDE, ſe ha de inſcribir vn circulo: Cortenſe (a) 9. P. 1. (a) por medio qualeſquiera dos angulos immediatos, como los BAE, ABC, con las rectas AF, BF, que concurrirán en el punto F: tirenſe las rectas (b) 12. P. 1. FC, FD, FE; y del punto F, (b) ſobre los lados del pentagono, las perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL: Digo, que del punto F, con la diſtancia FG, deſcripto el circulo paſſarà por los demàs puntos H, I, K, L, y eſtarà inſcripto en el pentagono dado; porque en los dos triangulos ABF, CBF, los dos lados AB, BF del vno, ſon iguales a los dos lados CB,

CB, *BF* del otro, y los angulos *ABF*, *CBF*, iguales por la construccion: luego (c) la base *AF*, es igual a la base *CF*, y el angulo *BAF*, igual al angulo *BCF*; pero los angulos BAE, BCD son iguales, y el angulo BA*F*, es la mitad del angulo BAE: luego (d) el angulo BC*F*, tambien es la mitad del angulo *BCD*, y el angulo BCD queda partido por medio con la linea FC: Assimismo se demuestra, que los angulos CDE, DEA se parten por medio con las lineas *FD*, *FE*; y porque en los triangulos GFA, LFA, los dos angulos FGA, FAG del vno, son iguales a los dos angulos FLA, FAL del otro, y el lado *AF* comun està opuesto a iguales angulos: luego (e) la linea *FG*, es igual a la linea *FL*: de la misma suerte se demuestra, que las lineas *FH*, *FI*, *FK*, son iguales a las *FG*, *FL*: luego del punto *F*, con la distancia *FG* descripto el circulo, passarà por los demàs puntos H, I, K, L, y tocarà (f) los lados del pentagono: luego se ha inscripto vn circulo, &c. que es lo que se avia de hazer.

(c) 4. P. 1.
(d) axiom. 7.
(e) 26. P. 1.
(f) 16. P. 3.

SCHOLIO.

De la misma manera se inscribirà vn circulo en qualquiera otra figura equilatera, y equiangula, partiendo por medio dos angulos immediatos, porque siempre se demuestra, que las perpendiculares tiradas desde el concurso de las rectas que parten los angulos por medio, sobre los lados de la figura dada, son iguales entre si, como son las FG, FH, FI, FK, FL.

PROBLEMA 14. PROPOSICION 14.

Circumscribir vn circulo a vn pentagono equilatero, y equiangulo.

Fig. 18. Al pentagono equilatero, y equiangulo ABCDE, se ha de circumscribir vn circulo: par-
(a) tanse (a) por medio los dos angulos immediatos
9.P.1. BAE, ABC, con las rectas AF, BF, que concurriràn en el punto F: Digo, que el circulo descripto del punto *F* con la distancia FA, passarà por los demàs puntos B, C, D, E: tirense las lineas FC, FD, FE; y porque los lados AB, BF, son iguales a los lados CB, BF, y el angulo ABF, igual al angulo CBF por
(b) la construccion: luego (b) los angulos BCF, BAF,
4.P.1. son iguales entre si; pero el angulo BAE, es igual al angulo BCD, y el BAF, es la mitad del angulo *BAE*: luego el angulo *BCF*, tambien es la mitad del angulo *BCD*: de la misma manera se demuestra, que los demàs angulos CDE, DEA se parten por medio con las rectas EF, DF; y porque en el triangulo *AFB*, los dos angulos FAB, FBA, son iguales
(c) (c) los lados FA, FB, son iguales: assimismo se de-
6.P.1. muestra, que las lineas FC, FD, FE, son iguales à las lineas FA, FB: luego el circulo descripto del punto F, con la distancia FA, passarà por los demàs puntos *B*, *C*, *D*, *E*: luego se ha circumscripto vn circulo, &c. que es lo que se avia de hazer.

SCHO-

SCHOLIO.

De la misma manera se circumscribirà vn circulo à qualquier otra figura equilatera, y equiangula, partiendo por medio dos angulos immediatos, como son los A, y B, porque el concurso de las lineas AF, BF *en el punto* F, *serà el centro del circulo, y la demonstracion es la misma.*

PROBLEMA 15. PROPOSICION 15.

Inscribir vn Hexagono equilatero, y equiangulo en vn circulo dado.

En el circulo dado *ABC*, cuyo centro G, se ha de inscribir vn hexagono equilatero, y equiangulo: tirese el diametro AD, y del punto D con el semidiametro DG, describase el circulo CGE, y tirense las rectas CGF, *EGB*, *AB*, BC, CD, DE, EF, FA: Digo, que el hexagono ABCDEF, es equilatero, y equiangulo; porque (a) las lineas GC, CD, GD, son iguales: luego los tres angulos (b) GDC, DCG, CGD, son iguales; pero (c) todos tres son iguales a dos rectos; luego el vno CGD, es la tercera parte de dos rectos; assimismo se demuestra, que el angulo DGE, es la tercera parte de dos rectos; pero (d) los tres angulos CGD, DGE, EGF, son iguales a dos rectos, ò a tres tercias partes de dos rectos: luego el tercer angulo EGF, tambien es la tercera parte de dos rectos: luego los tres angulos CGD, DGE, EGF, son iguales entre si, y (e) à sus

Fig. 19.

(a) 15. def. 1

(b) 5. p. 1.

(c) 32. p. 1.

(d) 13. p. 1

(e) 15. p. 1.

sus verticales opuestos, que son AGF, AGB, BGC: luego los seis angulos en el centro son iguales, y
(f) 26.P.3. (f) los arcos AB, BC, CD, DE, *EF*, *FA*, son tambien iguales: luego (g) las rectas AB, BC, CD, DE,
(g) 29.P.3. *EF*, *FA*, son iguales, y el hexagono es equilatero; y porq̃ la circumferencia *AF*, es igual a la circumferencia ED, añadase a entrambas partes la circumferencia ABCD, y quedarà la circumferencia *FABCD* igual a la EDCBA; pero a la circumferencia *FABCD*, insiste el angulo *FED*, y a la
(h) EDCBA el angulo *AFE*: luego (h) los angulos
27.P.3. FED, AFE, son iguales entre si: de la misma suerte se demuestra, que los demàs angulos del hexagono, que son FAB, ABC, BCD, CDE, son iguales a los angulos FED, AFE: luego el hexagono es equiangulo: luego se ha inscripto vn hexagono, &c. que es lo que se avia de hazer.

COROLARIOS.

1. De aqui se sigue lo primero, que el lado del hexagono es igual al semidiametro del circulo.

2. Siguese lo segundo, que el angulo del hexagono equilatero, y equiangulo, es igual a quatro tercias partes de vn recto; porque el angulo del hexagono como BAF, se compone de los dos angulos BAG, GAF, de los quales cada vno està demostrado, que es vna tercera parte de dos rectos, ò dos tercias partes de vn recto.

Fig. 20. 3. Siguese lo tercero, que si al diametro AD, se tira por el centro la perpendicular HI, y de los puntos A, H, D, I, se corta la circumferencia à entrambas partes con el semidiametro GI, como en los puntos F, E, &c. que quedarà cortada en doze partes iguales; porque el angulo AGI, es recto, y el angulo AGF està demostrado igual a dos tercias partes de vn recto: luego el angulo FGI, es vna tercia parte de vn recto, ò vna duodecima

cima

cima parte de quatro rectos: luego la circumferencia FI, es vna duodecima parte de toda la circumferencia del circulo.

4. Siguese lo quarto, que si se tira el diametro FB, y del punto B, con el semidiametro *BA*, se describe el arco CAD, que tiradas las rectas CD, DF, CF, forman vn triangulo equilatero; porque los arcos *CF, DF, CBD*, son iguales entre si, por ser dos sextas partes del circulo: luego [i] las lineas *FC, FD, CD*, son iguales. Fig. 21. [i] 29. P. 3.

5. Siguese lo quinto, que el lado del triangulo equilatero, como el lado CD, estando perpendicular sobre el diametro *FB*, corta la quarta parte del diametro; porque en los triangulos *BCX*, ACX, los dos lados AC, CX del vno, son iguales a los lados *BC*. CX del otro, y los angulos [k] ACX, *BCX*, iguales, porque insisten a iguales circumferencias GD, *BD*: luego [l] las bases AX, *BX* son iguales: luego la *BX*, es la quarta parte del diametro *BF*. [k] 27. P. 3 (l) 4. P. I.

6. Siguese lo sexto, que el quadrado del lado *CF*, es triplo del quadrado del semidiametro *FA*: porque el angulo *BCF* es recto en el semicirculo: luego [m] el quadrado del diametro BF, es igual a los dos quadrados de la *BC*, y de la *CF*; pero el quadrado del semidiametro *FA*, [n] es la quarta parte del quadrado del diametro *FB*: luego el quadrado del semidiametro FA tambien es la quarta parte de los dos quadrados de la BC, y de la CF; pero la CB, es igual al semidiametro *FA*, y sus quadrados tambien son iguales: luego el quadrado de la CF, es triplo del quadrado del semidiametro FA: luego el quadrado de la CF al quadrado de la FB, es como 3. a. 4 luego el lado CF, es incomensurable con el diametro *FB*, porque es como la raiz quadrada de 3. a 2. que es la raiz quadrada de 4. [m] 47. P. I. (n) cor. 4. P. 2.

SCHOLIO.

Sobre vna linea recta dada como CB, se formarà vn hexagono equilatero, y equiangulo desta manera: Sobre la recta BC, formese el triangulo equilatero CAB, y del punto A, con la distancia AC, describase vn circulo, serà la linea CB, vn lado del hexagono inscripto en este circulo. Fig. 22.

PRO-

PROBLEMA 16. PROPOSICION 16.

Inscribir vna figura de quinze lados, y angulos iguales en vn circulo dado.

Fig. 23. En el circulo dado ABC, inscribase (a) el triangu-
(a) 2. P. 4. lo equilatero ABC, y seràn (b) las circumferencias
(b) 28 P. 3. AB, BC, CA, iguales entre si, y cada vna dellas con-
(c) 11. P. 4. tendrà cinco partes de las quinze, en que se ha de
dividir el circulo: Inscribase (c) tambien en el
circulo dado vn pentagono equilatero, y equian-
gulo, y sea vn lado suyo la linea AD: luego la cir-
cumferencia AD, contiene tres partes de las quin-
ze, en que se ha de dividir el circulo: luego la cir-
(d) cumferencia DC, contiene dos partes de las quin-
30. P. 3. ze en que se ha de dividir el circulo: Cortese (d)
la circumferencia DC en dos partes iguales en el
punto E, y quedarà cada vna de las dos circumfe-
rencias DE, EC, la quinzena parte de toda la cir-
cumferencia del circulo: luego si se acomodan en
el circulo ABC, las lineas rectas DE, EC, &c. Estarà
(e) 29. P. 3. (e) en el circulo dado descripta vna figura de
quinze lados iguales; pero tambien es equiangula,
porque cada angulo insiste a treze arcos de los
quinze iguales: luego està inscripta vna figura de
quinze lados, y angulos iguales, que es lo que se
avia de hazer.

Des-

Desta misma suerte se inscribiràn otras figuras regulares: (esto es equilateras, y equiangulas) en vn circulo: porque si en vn circulo se inscriben dos lados AC, y AD, de figuras regulares, la diferencia de los arcos, que es la CD, contendrà tantos lados de la nueva figura regular, que se ha de inscribir quantas vnidades tiene la diferencia de entrambas, y los lados de la nueva figura salen por la multiplicacion de los lados de las figuras inscriptas: como si el lado AC es de vn triangulo, y el AD de vn pentagono, la diferencia de los denominadores de las figuras es 2. luego el arco CD, contendrà dos lados de la nueva figura, la qual se conocerà multiplicando el numero de los lados de la vna, que es 3. por el numero de los lados de la otra, que es 5. cuyo producto es 15. y assi la nueva figura serà de quinze lados. Assimismo, si el lado AC fuesse de vn quadrado, y el lado AD de vn hexagono, el arco DC, contendria dos lados de la nueva figura, assi como la diferencia del quadrado al hexagono es 2. y la nueva figura inscripta seria de veinte y quatro lados, y angulos iguales.

FIN DEL LIBRO QVARTO.



LIBRO QVINTO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES.



Ste libro trata de la cantidad en commun, ò en abstracto: la cantidad es en dos maneras discreta, y continua: *la discreta contiene los numeros*; la continua *las lineas, superficies, y cuerpos, ò solidos. De todas estas cosas se trata aqui debaxo deste nombre canti dad; esto es, no en quanto son numeros, lineas, superficie, y solidos, sino en quanto son precisamente cantidad, que es en lo que convienen todas; y se demuestran muchas proposiciones de la cantidad en comun, y estas despues se aplican a las cantidades en particular.*

DEFINICIONES.

1. Parte es vna cantidad menor de otra mayor, quan-

quando la menor mide a la mayor: *como 2 y 3 son parte de 24. porque 2 repetido doze vezes, y 3 repetido ocho vezes igualan al numero 24.*

La parte es en dos maneras: vna se llama aliquota, *y otra se llama* aliquanta: *parte* aliquota *es la que definimos, y desta sola se habla en la definicion: Parte* aliquanta *es, la que repetida algunas vezes no iguala a la mayor cantidad, pero se compone de partes aliquotas, como 5 respecto de 24. que repetido quatro vezes es menor, y cinco vezes es mayor, pero se compone de vnidades, que son partes aliquotas de 24. Lo mismo se entiende en lineas superficies, y solidos.*

2. Multiplice se llama la cantidad mayor respecto de la menor quando la menor mide a la mayor: *como 24 es multiplice de 12 de 8 de 6 de 4 de 3 y de 2 y cada vna de estas es parte de 24 como està definido: lo mismo se entiende en lineas superficies, y cuerpos.*

3. Razon es el respecto, ò relacion mutua, que tienen entre si dos magnitudes de vn mismo genero segun la cantidad sola.

Magnitudes de vn mismo genero son, linea con linea, superficie con superficie, solido con solido: compararse segun la cantidad es en quanto la vna es igual, ò mayor, ò menor que la otra: y asi la comparacion de vna linea en quanto blanca, a otra en quanto negra, ò de otro color, no es la razon que aqui se define.

4. Proporcion es la ſemejanza de las razones.

La razon diximos, que era relacion de dos cantidades, y la proporcion es relacion de dos razones, y dizeſe, que quando dos razones ſon ſemejantes entre ſi, ò iguales, ò vna miſma (que todo ſignifica lo miſmo:) eſta ſemejanza de razones ſe llama Proporcion, *y las cantidades en que ſe fundan las razones ſemejantes, ſe llaman* proporcionales: *como ſi la cantidad A, ſe compara con la B, y la C con la D, y la razon que la A 3. tiene a la B 9. es, ſer la tercera parte, y la razon que la C 5. tiene a la D 15. tambien es, ſer la tercera parte; eſtas dos razones ſon ſemejãtes, ò iguales, ò vna miſma; porque ſon la terceraparte de vnas, y otras cantidades, y eſta ſemejança de razones ſe llama* Proporcion, *y las cantidades A, B, C, D, ſe llaman* Proporcionales. *Algunos llaman* Proporcion *a la razon entre dos cantidades, y a la ſemejança de las razones llaman* Proporcionalidad: *Dizen por exemplo: la cantidad A.6. tiene la miſma proporcion a la cantidad B.3. que la cantidad C.18. a la cantidad D.9. y aſsi lo que diximos que ſe llama* razon, *llaman ellos* Proporcion, *y* Proporcionalidad *a lo que llamamos* Proporcion. *Eſta advertencia ſervirà para conocer, que quando ay ſolamente dos cantidades, por la Proporcion ſe entiende lo miſmo que la razon, y noſotros comunmente llamarèmos* Proporcion *a la razon entre dos cantidades, y* proporcionalidad *a la ſeme-*

A. 3.	B. 9.
C. 5.	D. 15.

ſemejanza de las razones, que es lo mas vſado.

DIVISION DE LA PROPORCION.

Quando la razon, ò Proporcion de dos cantidades ſe puede explicar con numeros, como la que ay entre cantidades commenſurables, ſe llama Proporcion racional. *Quando la Proporcion de dos cantidades no ſe puede explicar con ningunos numeros, como la que ay entre cantidades incommenſurables, ſe llama* Proporcion irracional. Commenſurables cantidades *ſon, las que tienen vna medida comun* Incommenſurables *las que no la tienen, como el lado del quadrado, y ſu diagonal: el lado del triangulo equilatero en vn circulo, y el diametro del circulo: corol. 6. P. 15. lib. 4.*

La razon, ò proporcion requiere dos terminos; el primero que ſe compara, ſe llama antecedente, *el ſegundo a quien ſe compara, ſe llama* conſequente. *El* antecedente, *ò es igual a ſu conſequente, ò mayor, ò menor. Quando el antecedente es igual al conſequente, la Proporcion que tienen, ſe llama* de igualdad. *Quando el antecedente es mayor que el conſequente, ſe llama Proporcion de* mayor deſigualdad. *Quando el antecedente es menor que el conſequente, ſe llama Proporcion de* menor deſigualdad.

La Proporcion de mayor deſigualdad es en cinco maneras: Multiplice, ſuperparticular, ſuperpartiente, Multiplice ſuperparticular, Multiplice ſuperpartiente.

Proporcion multiplice *es: quando la mayor cantidad contiene cabalmente algunas vezes a la menor. El multiplice*

tiplice toma el nombre de las vezes, que incluye a la menor cantidad, y assi se llama duplo, *si la incluye dos vezes,* triplo *si tres,* quadruplo *si quatro, &c. La parte toma el mismo nombre de las vezes, que està contenida en la mayor cantidad con la particula* sub: *y assi se llama* subdupla *si està incluyda dos vezes,* subtripla *si tres,* subquadrupla *si quatro, &c. lo que se entiende tambien de todas las siguientes.*

Proporcion superparticular *es, quando la mayor cantidad contiene vna vez a la menor, y vna parte aliquota suya, como mitad; y entonces se llama* sesquialtera, *ò tercia parte, y se llama* sesquitercia, *&c. tomando el nombre siempre de la parte aliquota, que contiene demàs de la menor cantidad.*

Proporcion superpartiente *es, quando la mayor cantidad contiene vna vez a la menor, y algunas partes aliquotas suyas, que todas juntas no componen vna parte aliquota, como la que ay entre* 8. *y* 5. *que se llama* supertripartiente quintas, *porque el* 8. *contiene al* 5. *vna vez, y tres vnidades mas, que son tres quintas partes del* 5. *que todas juntas no componē vna parte aliquota del mismo* 5. *Tomando esta proporcion el additamento de* tercias, quartas, quintas, *&c. y del numero de las partes aliquotas, que incluye de la menor cantidad.*

Proporcion multiplice superparticular *es, quando la mayor cantidad contiene algunas vezes a la menor, y vna parte aliquota suya, como* 5. *a* 2.

Proporcion multiplice superpartientē *es, quan-*

do

do la mayor cãntidad contiene algunas vezes a la menor, y alg unas partes aliquotas suyas, que todas juntas no componen vna parte aliquota, como 8. *à* 3.

5. Entonces se dize, que entre dos magnitudes ay proporcion, quando la vna dellas algunas vezes repetida puede exceder a la otra, y al contrario: *Por esta causa entre vna magnitud finita, y otra infinita no puede aver proporcion, porque la magnitud finita, aunque se repita successivamente quanto se quisiere, no puede igualar, y mucho menos exceder a la infinita.*

6. Quatro cantidades estàn en vna mismа proporcion; la primera a la segunda, y la tercera a la quarta: quando tomando qualesquiera igualmente multiplices de la primera, y de la tercera, y otros qualesquiera igualmente multiplices de la segunda, y de la quarta: sucede, que los multiplices de la primera, y de la tercera juntamente, ò son iguales, ó son mayores, ò son menores, que los multiplices de la segunda, y de la quarta.

Sean las quatro cantidades A, B, C, D, y tomense de la primera A, y tercera C, qualesquiera igualmente multiplices, y de la segunda B, y quarta D, otros qualesquiera igualmente multiplices: si en todos los possibles multiplices sucedìesse, que siendo el multiplice de la primera cantidad A, igual al multiplice de la segunda B: tambien el multiplice de la tercera C fuere igual al multiplice de la quarta D:

	A.	B.	C	D.
	3.	9.	2.	6.
Mul:	18.	18.	12.	12.
tipli:	30.	27.	20.	18
ces:	24.	36.	16.	24.

màs angulos IKL,KLG,LGH,ſon iguales àlos angulos BHA,BIC,luego el pentagono circumſcripto, es equiangulo: luego ſe ha circumſcripto vn pentagono,&c. que es lo que ſe avia de hazer.

COROLARIO.

De aqui ſe ſigue,que ſi en vn circulo ſe inſcribe vna figura equilatera,y equiangula,y por ſus angulos ſe tiraren tangentes del circulo, que ſe circumſcribirá al circulo vna figura ſemejante equilatera, y equiangula a la figura inſcripta: porque de la miſma ſuerte como en el pentagono,ſiempre ſe demoſtrará,que los lados GH.HI,ſon iguales, y tambien los angulos BHA,BIC,iguales,&c.

PROBLEMA 13. PROPOSICION 13.

Inſcribir vn circulo en vn pentagono equilatero, y equiangulo.

Fig. 17. En el pentagono equilatero, y equiangulo ABCDE,ſe ha de inſcribir vn circulo: Cortenſe (a) por medio qualeſquiera dos angulos immediatos,como los BAE,ABC, con las rectas AF,BF, que concurriràn en el punto F: tirenſe las rectas FC,FD,FE;y del punto F,(b) ſobre los lados del pentagono,las perpendiculares FG, FH, FI,FK, FL: Digo, que del punto F, con la diſtancia FG, deſcripto el circulo paſſarà por los demàs puntos H,I,K,L,y eſtarà inſcripto en el pentagono dado; porque en los dos triangulos ABF, CBF, los dos lados AB, BF del vno, ſon iguales a los dos lados CB,

(a) 9. P. 1.

(b) 12. P. 1.

CB,*BF* del otro,y los angulos *ABF*,*CBF*, iguales por la construccion: luego (c) la base *AF*, es igual a la base *CF*, y el angulo *BAF*, igual al angulo *BCF*; pero los angulos BAE,BCD son iguales,y el angulo BA*F*, es la mitad del angulo BAE: luego (d) el angulo BCF,tambien es la mitad del angulo *BCD*, y el angulo BCD queda partido por medio con la linea FC: Assimismo se demuestra, que los angulos CDE,DEA se parten por medio con las lineas *FD*,*FE*; y porque en los triangulos GFA, LFA, los dos angulos FGA, FAG del vno, son iguales a los dos angulos FLA,FAL del otro, y el lado *AF* comun està opuesto a iguales angulos: luego (e) la linea *FG*,es igual a la linea *FL*: de la misma suerte se demuestra,que las lineas *FH*, *FI*, *FK*, son iguales a las *FG*,*FL*: luego del punto *F*, con la distancia*FG* descripto el circulo,passarà por los demàs puntos H,I,K,L, y tocarà (f) los lados del pentagono: luego se ha inscripto vn circulo, &c. que es lo que se avia de hazer.

(c) 4. P. 1.

(d) axiom. 7.

(e) 26. P. 1.

(f) 16. P. 3.

SCHOLIO.

De la misma manera se inscribirà vn circulo en qualquiera otra figura equilatera, y equiangula, partiendo por medio dos angulos immediatos, porque siempre se demostrarà, que las perpendiculares tiradas desde el concurso de las rectas que parten los angulos por medio, sobre los lados de la figura dada, son iguales entre si, como son las FG,FH,FI,FK,FL.

PROBLEMA 14. PROPOSICION 14.

Circumscribir vn circulo a vn pentagono equilatero, y equiangulo.

Fig. 18. Al pentagono equilatero, y equiangulo ABCDE, se ha de circumscribir vn circulo: partanse (a) por medio los dos angulos immediatos (a) 9.P.1. BAE, ABC, con las rectas AF, BF, que concurriràn en el punto F: Digo, que el circulo descripto del punto *F* con la distancia FA, passarà por los demàs puntos B, C, D, E: tirense las lineas FC, FD, FE; y porque los lados AB, BF, son iguales a los lados CB, BF, y el angulo ABF, igual al angulo CBF por la construccion: luego (b) los angulos BCF, BAF, (b) 4.P.1. son iguales entre si; pero el angulo BAE, es igual al angulo BCD, y el BAF, es la mitad del angulo *BAE*: luego el angulo *BCF*, tambien es la mitad del angulo *BCD*: de la misma manera se demuestra, que los demàs angulos CDE, DEA se parten por medio con las rectas EF, DF; y porque en el triangulo *AFB*, los dos angulos FAB, FBA, son iguales (c) (c) los lados FA, FB, son iguales: assimismo se de- 6.P.1. muestra, que las lineas FC, FD, FE, son iguales a las lineas FA, FB: luego el circulo descripto del punto F, con la distancia FA, passarà por los demàs puntos *B*, *C*, *D*, *E*: luego se ha circumscripto vn circulo, &c. que es lo que se avia de hazer.

SCHO-

SCHOLIO.

De la misma manera se circumscribirà vn circulo à qualquier otra figura equilatera, y equiangula partiendo por medio dos angulos immediatos, como son los A, y B, porque el concurso de las lineas AF, BF en el punto F, serà el centro del circulo, y la demonstracion es la misma.

PROBLEMA 15. PROPOSICION 15.

Inscribir vn Hexagono equilatero, y equiangulo en vn circulo dado.

En el circulo dado *ABC*, cuyo centro G, se ha de inscribir vn hexagono equilatero, y equiangulo: tirese el diametro AD, y del punto D con el semidiametro DG, describase el circulo CGE, y tirense las rectas CGF, *EGB*, *AB*, BC, CD, DE, EF, FA: Digo, que el hexagono ABCDEF, es equilatero, y equiangulo; porque (a) las lineas GC, CD, GD, son iguales: luego los tres angulos (b) GDC, DCG, CGD, son iguales; pero (c) todos tres son iguales a dos rectos; luego el vno CGD, es la tercera parte de dos rectos; assimismo se demuestra, que el angulo DGE, es la tercera parte de dos rectos; pero (d) los tres angulos CGD, DGE, EGF, son iguales a dos rectos, ò a tres tercias partes de dos rectos: luego el tercer angulo EGF, tambien es la tercera parte de dos rectos: luego los tres angulos CGD, DGE, EGF, son iguales entre si, y (e) à sus

Fig. 19.
(a) 15. def. 1
(b) 5. P. 1.
(c) 32. P. 1.
(d) 13. P. 1
(e) 15. P. 1.

sus verticales opuestos, que son AGF, AGB, BGC: luego los seis angulos en el centro son iguales, y
(f) 26.P.3. (f) los arcos AB, BC, CD, DE, *EF*, *FA*, son tambien iguales: luego (g) las rectas AB, BC, CD, DE,
(g) 29.P.3. *EF*, *FA*, son iguales, y el hexagono es equilatero; y porq̃ la circumferencia *AF*, es igual a la circumferencia ED, añadase a entrambas partes la circumferencia ABCD, y quedarà la circumferencia *FABCD* igual a la EDCBA; pero a la circumferencia *FABCD*, insiste el angulo *FED*, y a la
(h) EDCBA el angulo *AFE*: luego (h) los angulos
27.P.3. FED, AFE, son iguales entre si: de la misma suerte se demuestra, que los demàs angulos del hexagono, que son FAB, ABC, BCD, CDE, son iguales a los angulos FED, AFE: luego el hexagono es equiangulo: luego se ha inscripto vn hexagono, &c. que es lo que se avia de hazer.

COROLARIOS.

1. De aqui se sigue lo primero, que el lado del hexagono es igual al semidiametro del circulo.

2. Siguese lo segundo, que el angulo del hexagono equilatero, y equiangulo, es igual a quatro tercias partes de vn recto; porque el angulo del hexagono como BAF, se compone de los dos angulos BAG, GAF, de los quales cada vno està demostrado, que es vna tercera parte de dos rectos, ó dos tercias partes de vn recto.

Fig. 20. 3. Siguese lo tercero, que si al diametro AD, se tira por el centro la perpendicular HI, y de los puntos A, H, D, I, se corta la circumferencia á entrambas partes con el semidiametro GI, como en los puntos F, E, &c. que quedarà cortada en doze partes iguales; porque el angulo AGI, es recto, y el angulo AGF està demostrado igual a dos tercias partes de vn recto: luego el angulo FGI, es vna tercia parte de vn recto, ó vna duode-
cima

cima parte de quatro rectos: luego la circumferencia FI, es vna duodecima parte de toda la circumferencia del circulo.

4. Siguese lo quarto, que si se tira el diametro FB, y del punto B, con el semidiametro *BA*, se describe el arco CAD, que tiradas las rectas CD, DF, CF, forman vn triangulo equilatero; porque los arcos *CF*, *DF*, *CBD*, son iguales entre si, por ser dos sextas partes del circulo: luego [i] las lineas *FC*, *FD*, *CD*, son iguales. Fig. 21. [i] 29. P. 3.

5. Siguese lo quinto, que el lado del triangulo equilatero, como el lado CD, estando perpendicular sobre el diametro *FB*, corta la quarta parte del diametro; porque en los triangulos *BCX*, ACX, los dos lados AC, CX del vno, son iguales a los lados *BC*. CX del otro, y los angulos [k] ACX, *BCX*, iguales, porque insisten a iguales circumferencias GD, *BD*: luego [l] las bases AX, *BX* son iguales: luego la *BX*, es la quarta parte del diametro *BF*. [k] 27. P. 3 (l) 4. P. 1.

6. Siguese lo sexto, que el quadrado del lado *CF*, es triplo del quadrado del semidiametro *FA*: porque el angulo *BCF* es recto en el semicirculo: luego [m] el quadrado del diametro BF, es igual a los dos quadrados de la *BC*, y de la *CF*; pero el quadrado del semidiametro *FA*, [n] es la quarta parte del quadrado del diametro *FB*: luego el quadrado del semidiametro F*A* tambien es la quarta parte de los dos quadrados de la BC, y de la CF; pero la CB, es igual al semidiametro *FA*, y sus quadrados tambien son iguales: luego el quadrado de la CF, es triplo del quadrado del semidiametro FA: luego el quadrado de la CF al quadrado de la FB, es como 3. a. 4 luego el lado CF, es incomensurable con el diametro *FB*, porque es como la raiz quadrada de 3. a 2. que es la raiz quadrada de 4. [m] 47. P. 1. (n) cor. 4. P. 2.

SCHOLIO.

Sobre vna linea recta dada como CB, se formarà vn hexagono equilatero, y equiangulo desta manera: Sobre la recta BC, formese el triangulo equilatero CAB, y del punto A, con la distancia AC, describase vn circulo, serà la linea CB, vn lado del hexagono inscripto en este circulo. Fig. 22.

PRO-

PROBLEMA 16. PROPOSICION 16.

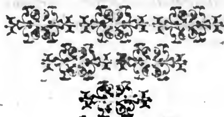
Inscribir vna figura de quinze lados, y angulos iguales en vn circulo dado.

Fig. 23. En el circulo dado ABC, inscribase (a) el triangu-
(a) 2. P. 4. lo equilatero ABC, y serán (b) las circumferencias
(b) 28. P. 3. AB, BC, CA, iguales entre si, y cada vna dellas con-
(c) 11. P. 4. tendrà cinco partes de las quinze, en que se ha de
dividir el circulo: Inscribase (c) tambien en el
circulo dado vn pentagono equilatero, y equian-
gulo, y sea vn lado suyo la linea AD: luego la cir-
cumferencia AD, contiene tres partes de las quin-
ze, en que se ha de dividir el circulo: luego la cir-
cumferencia DC, contiene dos partes de las quin-
(d) 30. P. 3. ze en que se ha de dividir el circulo: Cortese (d)
la circumferencia DC en dos partes iguales en el
punto E, y quedarà cada vna de las dos circumfe-
rencias DE, EC, la quinzena parte de toda la cir-
cumferencia del circulo: luego si se acomodan en
el circulo ABC, las lineas rectas DE, EC, &c. Estarà
(e) 29. P. 3. (e) en el circulo dado descripta vna figura de
quinze lados iguales; pero tambien es equiangula,
porque cada angulo insiste a treze arcos de los
quinze iguales: luego està inscripta vna figura de
quinze lados, y angulos iguales, que es lo que se
avia de hazer.

Des-

Desta misma suerte se inscribiràn otras figuras regulares: (esto es equilateras, y equiangulas) en vn circulo: porque si en vn circulo se inscriben dos lados AC, y AD, de figuras regulares, la diferencia de los arcos, que es la CD, contendrà tantos lados de la nueva figura regular, que se ha de inscribir quantas vnidades tiene la diferencia de entrambas, y los lados de la nueva figura salen por la multiplicacion de los lados de las figuras inscriptas: como si el lado AC es de vn triangulo, y el AD de vn pentagono, la diferencia de los denominadores de las figuras es 2. luego el arco CD, contendrà dos lados de la nueva figura, la qual se conocerà multiplicando el numero de los lados de la vna, que es 3. por el numero de los lados de la otra, que es 5. cuyo producto es 15. y assi la nueva figura serà de quinze lados. Assimismo, si el lado AC fuesse de vn quadrado, y el lado AD de vn hexagono, el arco DC, contendria dos lados de la nueva figura, assi como la diferencia del quadrado al hexagono es 2. y la nueva figura inscripta seria de veinte y quatro lados, y angulos iguales.

FIN DEL LIBRO QVARTO.



LIBRO QVINTO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES.



Ste libro trata de la cantidad en comun, ò en abstracto: la cantidad es en dos maneras discreta, y continua: *la discreta contiene los numeros*; *la* continua *las lineas, superficies, y cuerpos, ò solidos. De todas estas cosas se trata aqui debaxo deste nombre canti dad; esto es, no en quanto son numeros, lineas, superficie, y solidos, sino en quanto son precisamente cantidad, que es en lo que convienen todas; y se demuestran muchas proposiciones de la cantidad en comun, y estas despues se aplican a las cantidades en particular.*

DEFINICIONES.

1. Parte es vna cantidad menor de otra mayor, quan-

quando la menor mide a la mayor: *como 2 y 3 son parte de 24. porque 2 repetido doze vezes, y 3 repetido ocho vezes igualan al numero 24.*

La parte es en dos maneras: vna se llama aliquota, *y otra se llama* aliquanta: *parte* aliquota *es la que definimos, y desta sola se habla en la definicion: Parte* aliquanta *es, la que repetida algunas vezes no iguala a la mayor cantidad, pero se compone de partes aliquotas, como 5 respecto de 24. que repetido quatro vezes es menor, y cinco vezes es mayor, pero se compone de vnidades, que son partes aliquotas de 24. Lo mismo se entiende en lineas superficies, y solidos.*

2. Multiplice se llama la cantidad mayor respecto de la menor quando la menor mide a la mayor: *como 24 es multiplice de 12 de 8 de 6 de 4 de 3 y de 2 y cada vna de estas es parte de 24 como està definido: lo mismo se entiende en lineas superficies, y cuerpos.*

3. Razon es el respecto, ò relacion mutua, que tienen entre si dos magnitudes de vn mismo genero segun la cantidad sola.

Magnitudes de vn mismo genero son, linea con linea, superficie con superficie, solido con solido: compararse segun la cantidad es en quanto la vna es igual, ò mayor, ò menor que la otra: y asi la comparacion de vna linea en quanto blanca, a otra en quanto negra, ò de otro color, no es la razon que aqui se define.

4. Proporcion es la ſemejanza de las razones.

La razon diximos, que era relacion de dos cantidades, y la proporcion es relacion de dos razones, y dizeſe, que quando dos razones ſon ſemejantes entre ſi, ò iguales, ò vna miſma (que todo ſignifica lo miſmo:) eſta ſemejanza de razones ſe llama Proporcion, *y las cantidades en que ſe fundan las razones ſemejantes, ſe llaman* proporcionales: *como ſi la cantidad A, ſe compara con la B, y la C con la D, y la razon que la A 3. tiene a la B 9. es, ſer la tercera parte, y la razon que la C 5. tiene a la D 15. tambien es, ſer la tercera parte; eſtas dos razones ſon ſemejantes, ò iguales, ò vna miſma; porque ſon la tercera parte de vnas, y otras cantidades, y eſta ſemejanza de razones ſe llama* Proporcion, *y las cantidades A, B, C, D, ſe llaman* Proporcionales. *Algunos llaman* Proporcion *a la razon entre dos cantidades, y a la ſemejanza de las razones llaman* Proporcionalidad: *Dizen por exemplo: la cantidad A. 6. tiene la miſma proporcion a la cantidad B. 3. que la cantidad C. 18. a la cantidad D. 9. y aſsi lo que diximos que ſe llama* razon, *llaman ellos* Proporcion, *y* Proporcionalidad *a lo que llamamos* Proporcion. *Eſta advertencia ſervirà para conocer, que quando ay ſolamente dos cantidades, por la Proporcion ſe entiende lo miſmo que la razon, y noſotros comunmente llamarèmos* Proporcion *a la razon entre dos cantidades, y* proporcionalidad *a la ſeme-*

A. 3.	B. 9.
C. 5.	D. 15.

ſemejança de las razones, que es lo mas vſado.

DIVISION DE LA PROPORCION.

Quando la razon, ò Proporcion de dos cantidades ſe puede explicar con numeros, como la que ay entre cantidades commenſurables, ſe llama Proporcion racional. *Quando la Proporcion de dos cantidades no ſe puede explicar con ningunos numeros, como la que ay entre cantidades incommenſurables, ſe llama* Proporcion irracional. Commenſurables cantidades *ſon, las que tienen vna medida comun* Incommenſurables *las que no la tienen, como el lado del quadrado, y ſu diagonal: el lado del triangulo equilatero en vn circulo, y el diametro del circulo: corol. 6. P. 15. lib. 4.*

La razon, ò proporcion requiere dos terminos; el primero que ſe compara, ſe llama antecedente, *el ſegundo a quien ſe compara, ſe llama* conſequente. *El* antecedente, *ò es igual a ſu conſequente, ò mayor, ò menor. Quando el antecedente es igual al conſequente, la Proporcion que tienen, ſe llama* de igualdad. *Quando el antecedente es mayor que el conſequente, ſe llama Proporcion de* mayor deſigualdad. *Quando el antecedente es menor que el conſequente, ſe llama Proporcion de* menor deſigualdad.

La Proporcion de mayor deſigualdad es en cinco maneras: Multiplice, ſuperparticular, ſuperpartiente, Multiplice ſuperparticular, Multiplice ſuperpartiente.

Proporcion multiplice *es; quando la mayor cantidad contiene cabalmente algunas vezes a la menor. El multiplice*

tiplice toma el nombre de las vezes, que incluye a la menor cantidad, y assi se llama duplo, *si la incluye dos vezes,* triplo *si tres,* quadruplo *si quatro, &c. La parte toma el mismo nombre de las vezes, que està contenida en la mayor cantidad con la particula* sub: *y assi se llama* subdupla *si està incluyda dos vezes,* subtripla *si tres,* subquadrupla *si quatro, &c. lo que se entiende tambien de todas las siguientes.*

Proporcion superparticular *es, quando la mayor cantidad contiene vna vez a la menor, y vna parte aliquota suya, como mitad; y entonces se llama* sesquialtera, *ò tercia parte, y se llama* sesquitercia, *&c. tomando el nombre siempre de la parte aliquota, que contiene demàs de la menor cantidad.*

Proporcion superpartiente *es, quando la mayor cantidad contiene vna vez a la menor, y algunas partes aliquotas suyas, que todas juntas no componen vna parte aliquota, como la que ay entre* 8. *y* 5. *que se llama* supertripartiente quintas, *porque el* 8. *contiene al* 5. *vna vez, y tres vnidades mas, que son tres quintas partes del* 5. *que todas juntas no componē vna parte aliquota del mismo* 5. *Tomando esta proporcion el additamento de* tercias, quartas, quintas, *&c. y del numero de las partes aliquotas, que incluye de la menor cantidad.*

Proporcion multiplice superparticular *es, quando la mayor cantidad contiene algunas vezes a la menor, y vna parte aliquota suya, como* 5. *a* 2.

Proporcion multiplice superpartientē *es, quando*

do la mayor cãntidad contiene algunas vezes a la menor, y alg unas partes aliquotas suyas, que todas juntas no componen vna parte aliquota, como 8. *à* 3.

5. Entonces se dize, que entre dos magnitudes ay proporcion, quando la vna dellas algunas vezes repetida puede exceder a la otra, y al contrario: *Por esta causa entre vna magnitud finita, y otra infinita no puede aver proporcion, porque la magnitud finita, aunque se repita successivamente quanto se quisiere, no puede igualar, y mucho menos exceder a la infinita.*

6. Quatro cantidades estàn en vna misma proporcion; la primera a la segunda, y la tercera a la quarta: quando tomando qualesquiera igualmente multiplices de la primera, y de la tercera, y otros qualesquiera igualmente multiplices de la segunda, y de la quarta: sucede, que los multiplices de la primera, y de la tercera juntamente, ò son iguales, ò son mayores, ò son menores, que los multiplices de la segunda, y de la quarta.

Sean las quatro cantidades A, B, C, D, y tomense de la primera A, y tercera C, qualesquiera igualmente multiplices, y de la segunda B, y quarta D, otros qualesquiera igualmente multiplices: si en todos los possibles multiplices sucediesse, que siendo el multiplice de la primera cantidad A, igual al multiplice de la segunda B: tambien el multiplice de la tercera C fuere igual al multiplice de la quarta D:

	A.	B.	C	D.
	3.	9.	2.	6.
Mul:	18.	18.	12.	12.
tipli:	30.	27.	20.	18
ces:	24.	36.	16.	24.

ò ſiendo el multiplice de la A mayor que el de la B, tambien el multiplice de la C fuere mayor que el de la D: ò ſiendo vltimamente el multiplice de la A menor que el de la B, tambien el multiplice de la C fuere menor que el de la D: entonces la primera cantidad A, a la ſegunda B, tiene la miſma proporcion que la tercera C, â la quarta D: ſean las cantidades propueſtas, lineas, ſuperficies, ò cuerpos, y ſea la proporcion racional, ò irracional: y aſsi demoſtrando eſta propriedad de los multiplices, ſe puede arguir, que las quatro cantidades propueſtas A, B, C, D, eſtàn en la miſma proporcion: y al contrario, dando, que quatro cantidades ſon proporcionales, ſe arguirà, que los multiplices tienen la dicha propriedad: En los primeros multiplices de las cantidades propueſtas, los de la primera, y de la ſegunda ſon iguales, en los ſegundos el de la primera es mayor que el de la ſegunda, y en los terceros el de la primera es menor que el de la ſegunda, à que eſtàn reducidas las tres eſpecies de multiplices, que ſe pueden tomar de qualeſquiera cantidades.

NOTA.

La miſma proporcionalidad ſe puede definir tambien deſta ſuerte: Quatro cantidades eſtàn en vna miſma proporcion; quando los antecedentes de la miſma manera contienen, ò eſtàn contenidos en ſus conſequentes; *pero que los antecedentes contengan a ſus conſequentes, ò eſtèn contenidos de la miſma manera ſe avrà de demoſtrar, ò por los multiplices, ò de otra manera. Si ſe habla-*

hablara solamente de la Proporcion racional, pudiera definirse la proporcionalidad desta manera: Quatro cantidades estaràn en vna misma proporcion; quando los antecedentes son igualmente multiplices de sus consequentes, *como A 6 a B 3, es como C 4 a D 2:* ò quando los antecedentes son la misma parte, ò son las mismas partes aliquotas de sus consequentes; *v.g. A 3 a B 8, es como C 6 a D 16: porque los antecedentes son las mismas partes de sus consequentes, conviene a saber tres octavas partes:* ò quando los antecedentes contienen las mismas vezes, y además la misma parte, ò las mismas partes aliquotas de sus consequentes, *v.g. A 14 a B 5, es como C 28 a D 10: porque los antecedentes contienen a sus consequentes dos vezes, y quatro quintas partes de los consequentes:* ò quãdo los antecedentes estàn contenidos las mismas vezes, y además la misma parte, ò las mismas partes aliquotas suyas en los consequentes: *Estas definiciones comprehenden solamente la proporcion racional, porque en la proporcion irracional, la menor cantidad, ni es parte, ni partes de la mayor.*

7. Las cantidades que tienen vna misma proporcion, se llaman Proporcionales.

8. Quando de los igualmente multiplices, el multiplice de la primera magnitud fuere mayor que el de la segunda, pero el multiplice de la tercera no fuere mayor que el de la quarta: entonces la primera magnitud a la segunda, tiene mayor

proporcion, que la tercera a la quarta.

En la definicion 6 explicò Euclides el modo de conocer, quando quatro cantidades son proporcionales; en esta octava hablando de las que no lo son, dize, que quando tomando los multiplices como queda dicho en la definicion 6, sucediere, que siendo el multiplice de la primera mayor que el de la segunda, el de la tercera no fuere mayor que el de la quarta, entonces la proporcion, ò razon, que ay de la primera a la segunda magnitud, se llama mayor, *que la que ay de la tercera a la quarta; y si sucediere al contrario, que siendo el multiplice de la primera menor que el de la segunda, el de la tercera no fuere menor que el de la quarta, entonces la proporcion, ò razon que ay de la primera a la segunda magnitud, se llama* menor, *que la que ay de la tercera a la quarta.*

NOTA.

Esta definicion 8. se puede explicar, y concebir mejor debaxo destas palabras: Quando vn antecedente contiene mas, ò mas vezes, ò mas partes de su consequente, tiene mayor proporcion a èl, que otro antecedente, que contenga su consequente menos, ò menos vezes, ò menos partes dèl.

9. La proporcionalidad no puede consistir en menos de tres terminos.

Porque entre dos terminos no ay mas que vna propor-
cion,

cion, ò razon; pero la proporcionalidad por ser semejanza de dos proporciones, requiere que sea a lo menos como el primer termino al segundo, assi el mismo segundo al tercero; de suerte, que el consequente primero sea antecedente respeto del tercero, y esta se llama Proporcion continua; *la que no es assi; se llama* Proporcion discreta.

10. Quando ay tres magnitudes continuas proporcionales, la primera tiene a la tercera duplicada proporcion, de la que tiene a la segunda; y quãdo ay quatro cantidades continuas proporcionales, la primera a la quarta tiene triplicada proporcion, de la que tiene a la segunda; y assi en adelante tomando siempre el nombre del numero de los terminos, menos vno.

Como si ay cinco, ò seis, &c. terminos en continua proporcion, el primero al vltimo tiene quadruplicada, quintuplicada, &c. la proporcion de la que tiene al segundo. Se ha de observar, que la proporciõ duplicada, *no es lo mismo que* dupla, *porque proporcion* dupla *es, quando vn termino es duplo de otro, como A* 4. *de B* 2. *pero la proporcion* duplicada *es, quando vna proporcion (sea la que fuere dupla, &c.) se toma dos vezes: y assi la proporcion duplicada significa solamente, que la proporcion que la primera magnitud tiene a la segunda, interviene dos vezes continuadas, refiriendose a la tercera: ò que dadas dos magnitudes se ha de tomar la tercera proporcional:*

ni el nombre duplicada *determina el valor de la proporcion: Lo que se dize desta proporcion* duplicada, *se ha de entender de la* triplicada, quadruplicada, *&c. como en este exemplo: sea la cantidad A à la B, como la B à la C la proporcion que la primera magnitud A, tiene a la tercera C, se dize duplicada de la que tiene a la segunda, y esta duplicada en este exemplo es subquadrupla, porque la primera cantidad A, es la quarta parte de la tercera C: Si se sabe que proporcion es aquella, que la primera magnitud tiene a la segunda, entonces tambien se sabrà el valor de la proporcion duplicada, &c. como en este exemplo. La primera magnitud A 3 tiene a la segunda B 9, proporcion subtripla, y el quebrado* $\frac{1}{3}$ *exprime el valor de*

A.	B.	C.
2.	4.	8.

A.	B.	C.	D.	E.
3.	9.	27.	81.	243.
512.	128.	32.	8.	2.
2.	10.	50.	250.	1250.
10000.	1000.	100.	10.	1.

esta proporcion; y assi se podrà saber el valor desta proporcion duplicada, triplicada, quadruplicada, &c. Porque si el quebrado $\frac{1}{3}$ *que exprime la proporcion que A tiene a B: ò qualquier numero que exprime la proporcion de los primeros terminos, y se llama el* Denominador, *ò* la cantidad de la proporcion: *se multiplica por si mismo, serà el producto (que es* $\frac{1}{9}$*) el valor de la dicha proporcion duplicada; y si este mismo producto se buelve a multiplicar por el denominador de la proporcion, se sabrà el valor de la triplicada razon, (que en este caso serà* $\frac{1}{27}$ *: y assi en adelante en esta, y*

cu

en qualquiera otra proporcion continua, como se vè en los exemplos.

11. Magnitudes Homologas, ò semejantes en la proporcion se llaman, los antecedentes à los antecedentes, y los consequentes à los consequentes.

En las deficioniciones antecedentes se dixo, que la proporcionalidad es semejanza de proporciones; en esta se dize, que en qualquiera proporcionalidad, no solamente las proporciones se llaman semejantes, sino tambien los mismos terminos, ò magnitudes, se dizen semejantes, ò homologas, los antecedentes entre si, y los consequentes entre si, v.g: si es como A a B, assi C a D, los antecedentes A, y C, se llaman homologos entre si, y los consequentes B, y D homologos entre si.

A. B. C. D.

12. Alternar, ò permutar, ò razon alterna es, quando el vn antecedente se compara con el otro antecedente, y el vn consequente con el otro consequente.

Comparacion directa se llama, quando entre quatro terminos proporcionales, el antecedente primero es a su consequente, como el antecedente segundo a su consequente, y dados de esta suerte quatro terminos proporcionales, ay algunos modos de arguir, que se demuestran en este libro ser legitimos: El primero se llama razon alterna, y es: quando el antecedente pri-

A.	B	::	C.	D.	
9	3		12	4.	
A.	C.	::	B.	D.	
9	12		3.	4.	

Estos pũtos denotan, que las cantidades son proporcionales.

primero se compara al antecedente segundo, y el consequente primero se haze antecedente, y se compara al consequente segundo; v. g. si se dà, que como A 9. a B. 3. asi es C 12. a D 4. alternandose dirà: como A 9. a C 12. asi B 3. a D 4. Este modo de arguir se demuestra en la proposic. 16. Esta argumentacion sola entre todas pide que todos los terminos sean de vna misma especie de cantidad.

13. Invertir, ò razon inversa es: comparar el consequente en lugar de antecedente con su mismo antecedente en lugar de consequente.

Como en la razon dada de A 9. a B 3. y C 12. a D 4. Invirtiendo se dirà como B 3. a A 9. asi D 4. a C 12. Este modo de arguir se demuestra en el Corol. de la Prop. 4.

A.	B ::	C	D.
9	3	12	4.
B.	A ::	D	C
3	9	4.	12

14. Componer, ò razon compuesta es: comparar la suma del antecedente, y consequente como vno al mismo consequente.

+ esta nota significa mas.

La suma de dos cantidades se explica con esta señal + que significa mas: y asi dados quatro terminos proporcionales A, B, C, D, componiendo se dirà: como A + B, a B, asi C + D, a D. Este modo de arguir se demuestra en la Prop. 18.

A+B. B :: C+D. D

A este modo de arguir pueden añadirse otros dos modos: el primero se llama: Razon compuesta conver-

sa,

sa, quando la suma del antecedente, y consequente como vno se compara al antecedente. Como dados los terminos A, B, C, D proporcionales, por razon compuesta conversa se dirà, como A + B, a A, assi C + D, a C.

A + B A : : C + D, C
A. A + B : : C. C + D

El otro modo es : Razon compuesta contraria, *quando el antecedente se compara a la suma del antecedente, y consequente como vno : como dados los terminos proporcionales A, B, C, D por la razon compuesta contraria se dirà : como A, a A + B, assi C, a C + D. Estos dos modos de arguir se demuestran en la prop. 18.*

15. Dividir, ó division de razon es, quando el excesso del antecedente sobre el consequente, se compara al mismo consequente.

Dados quatro terminos proporcionales, quando los antecedentes son mayores que los consequentes, arguir dividiendo es: poner por antecedente el excesso, ò la diferencia con que el antecedente excede a su consequente, y compararle al mismo consequente : La diferencia de dos magnitudes se nota con esta señal — que significa menos, poniendo la magnitud mayor a la izquierda, y la menor a la derecha A — B significa la magnitud A menos B, que es la diferencia entre A, y B : Porque si la magnitud menor se quita de la mayor, el residuo es la diferencia, ò el excesso de la mayor : Dado pues que sea

— Esta nota significa menos.

A. B : : C. D
9 3 12 4.

A — B. B : : C — D. D
9 — 3. 3. 12. — 4. 4.

co-

como A.9.a B.3.asi C.12.a D.4.dividiendo se dirá, como A— B.6.a B.3. asi C— D.8.a D.4. Este modo de arguir se demuestra en la prop.17.

A este modo de arguir, tambien se pueden añadir otros dos, el primero se llama: Division conversa de razon, *quando el consequente se compara al excesso del antecedente sobre el consequente; como dados los terminos A, B, C, D, proporcionales, por la* division conversa de razon *se dirà, como el B al A— B. asi el D al C— D.*

El otro: Division contraria de razon: *quando el antecedente se compara con el excesso, con que el consequente sobrepuja al antecedente: como dados los terminos A, B, C, D proporcionales, por la division contraria de razon se dirà, como el A, a B— A, asi el C, a D— C. Estos dos modos de arguir se demuestran en la prop. 17.*

B. A— B::D.C — D.

A. B— A::C. D— C.

16. Convertir, ò razon conversa es, quando el antecedente se compara al excesso, con que el mismo sobrepuja al consequente.

Dados quatro terminos proporcionales, quando los antecedentes son mayores que los consequentes, arguir convirtiendo es, comparar el antecedente al excesso con que el antecedente excede a su consequente, como si es: como A 9. a B 3. asi C 12. a D 4. convirtiendo serà, como A 9. a A— B 6. asi C 12. a C— D 8. Este modo de arguir se demuestra en la prop. 19,

A. A— B	::	C. C— D.	
9.	6.	12.	8.

Da-

Dados pues quatro terminos proporcionales se pueden mudar segun estos cinco modos de arguir, ni es menester guardar el orden destos modos, si no immediatamente se puede dividir, ò componer, ò convertir, ò arguir, como fuere mas conveniente para la demonstracion, y quedaràn siempre proporcionales los quatro terminos que salen por estos modos: los exemplos se dieron en numeros, pero los quatro terminos proporcionales pueden ser lineas superficies, y cuerpos, ò dos de vnos, y dos de otros, y la proporcion racional, ò irracional.

17. Arguir por igualdad, ò razon de igualdad es: quando dadas mas que dos magnitudes, y otras en igual numero, que cada dos de entrambas partes tengan vna misma razon, fuere: como en las primeras magnitudes la primera a la vltima, assi en las segundas: ò es, tomar los extremos terminos dexando los medios.

Quando ay mas que dos magnitudes, como A, B, C, y otras en igual numero con las primeras, como D, E, F, y siempre dos de las primeras A, B, C, son proporcionales a otras dos de las segundas D, E, F, y se infiere: como en las primeras magnitudes la primera A a la vltima C, assi en las segundas la primera D a la vltima F; entonces se dize arguir por igualdad de razon: Lo mismo se entiende aunque aya mas cantidades que tres.

Y por quanto se puede arguir de dos maneras con la igualdad de razon; vna tomando las cantidades con el orden que entre si tienen, y la otra invirtiendo, y perturbando este orden, puso Euclides las dos definiciones siguientes, en que

explica la proporcion ordenada, y perturbada.

18. Proporcion ordenada es, quando dadas mas que dos magnitudes, y otras en igual numero, sucediere: que en las primeras el antecedente sea a su consequente, como en las segundas el antecedente a su consequente: y como el consequente en las primeras a otra cantidad, assi en las segundas el consequente sea tambien a otra cantidad.

Sea como A, antecedente a B consequente, asi D antecedente a E consequente, y como la B consequente en las primeras a otra tercera C, asi la E consequente en las segundas a otra tercera F; si se infiere como A a C, asi D a F, esta conclusion se llama por la igualdad ordenada, y se demuestra en la prop. 22.

A. B. C.
D. E. F.

19. Proporcion perturbada es: quando dadas tres magnitudes, y otras en igual numero; como en las primeras el antecedente fuere al consequente, asi en las segundas el antecedente sea al consequente; y como en las primeras el consequente fuere a otra tercera cantidad, asi en las segũdas otra tercera cantidad, sea al antecedẽte.

Sean tres magnitudes A, B, C, y otras en igual numero D, E, F, y sea como en las primeras magnitudes el antecedente A al consequente B, asi en las segundas el antecedente E al consequente F, y como en las primeras el consequen-

A. B. C.
D. E. F.

te

te B a otra tercera C, assi en las segundas otra tercera D al antecedente E, y se arguye: como en las primeras magnitudes la primera A a la vltima C, assi en las segundas la D a la vltima F: esta conclusion se llama por igualdad perturbada, y se demuestra en la proposicion 23.

Axioma vnico. La proporcion que tiene vna magnitud a otra, puede tener qualquier magnitud propuesta a otra quarta: y alguna otra magnitud a la propuesta: *Como la proporcion que tiene A a B, podrà tener tambien la magnitud C propuesta, a otra quarta como D: y tambien podrà tener esta misma proporcion otra cantidad distinta, como E a la cantidad C propuesta.*

NOTA.

Las lineas; y numeros en las figuras no significan solamente lineas, y numeros, si no la cantidad en comun, en quanto comprehende la continua; y la discreta.

THEOREMA 1. *PROPOSICION* 1.

Dadas algunas magnitudes en qualquier numero igualmente multiplices de otras tantas, cada vna de cada vna: como vna magnitud fuere multiplice de vna, assi todas lo seràn de todas.

Denſe las magnitudes AB, CD igualmente multiplices de las E, y F. Digo, que las AB, CD juntas, son igualmente multiplices de las E, y F juntas como la AB, lo es de la E. Porquè por quanto las magnitudes AB, CD, son igualmente multi- Fig. 1.

 pli-

plices de las E, y F; partase la AB en las magnitudes AG,GH,HB iguales a la E,y la CD en las CI, IK,KD iguales a la F, seràn las magnitudes AG, GH,HB, en igual numero a las CI,IK,KD; y porque la AG,y E son iguales,y la CI igual a la F,añadiendo la CI a la AG, y la F a la E, quedaràn las AG,CI juntas iguales a las E,F juntas: Assimismo las GH,IK juntas quedaràn iguales a las E, F juntas,y las HB, KD juntas iguales a las mismas E, F juntas: luego quantas vezes la magnitud E està contenida en la AB,otras tantas las E, y F juntas, estàn contenidas en las AB,y CD juntas: luego las AB, y CD juntas son igualmente multiplices de las E,y F juntas,como la AB lo era de la E: luego dadas algunas magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 2. PROPOSICION 2.

Si la primera magnitud es igualmente multiplice de la segunda como la tercera de la quarta; y la quinta tambien igualmente multiplice de la segunda como la sexta de la quarta: serà la compuesta de la primera, y de la quinta igualmente multiplice de la segunda, como la tercera con la sexta de la quarta.

Fig. 2. Sea la primera magnitud AB igualmente multiplice de la segunda C,como la tercera DE de la quar-

quarta F, y ſea tambien la quinta BG igualmente multiplice de la ſegunda C, como la ſexta EH de la quarta F: Digo, que la AG compueſta de la primera AB, y de la quinta *BG* es igualmente multiplice de la ſegunda C, como la DH compueſta de la tercera DE, y de la ſexta EH es multiplice de la quarta F. Porque por ſer las *AB*, y DE igualmente multiplices de las C, y *F*, avrà en la *AB* tantas magnitudes iguales a la C, quantas en la DE iguales a la *F*. Aſsimiſmo en la *BG* avrà tantas magnitudes iguales a la C, quantas en la EH iguales a la *F*: luego ſi a las iguales multitudes de las *AB*, y DE ſe añaden iguales multitudes de las *BG*, y EH; las multitudes de la AG compueſta de la primera, y quinta quedaràn iguales a las multitudes de la DH compueſta de la tercera, y ſexta: luego quantas vezes la C eſtà contenida en la AG, tantas vezes la *F* eſtà contenida en la DH: luego la AG es igualmente multiplice de la C, como la DH de la *F*, que es lo que ſe avia de demoſtrar.

THEOREMA 3. *PROPOSICION* 3.

Si la primera magnitud es igualmente multiplice de la ſegunda, como la tercera de la quarta, y ſe toman otras igualmente multiplices de la primera, y de la ter-

tercera, seràn las tomadas igualmente multiplices cada vna de la suya, la vna de la segunda, y la otra de la quarta.

Fig. 3. Sea la primera magnitud A, igualmente multiplice de la segunda B, como la tercera C de la quarta D, y tomense las E, y F, igualmente multiplices de la primera A, y de la tercera C: Digo, que la E es igualmente multiplice de la segunda B, como la F de la quarta D. Porque por quanto las E, y F son igualmente multiplices de las A, y C, si las E, y F se parten en magnitudes iguales a las A, y C como en las EG, GH, HI, y FK, KL, LM, avrà tantas partes en la E iguales à la A, quantas en la F, iguales à la C: pero las A, y C, son igualmente multiplices de las B, y D: luego las EG, FK, son tambien igualmente multiplices de las B, y D. Asimismo las GH, KL, y HI, LM, son igualmente multiplices de las mismas B, y D. Y porque la primera EG, es igualmente multiplice de la segunda B, como la tercera FK de la quarta D. Iten, la quinta GH, igualmente multiplice de la segunda B, como la
(a) sexta KL, de la quarta D serà (a) tambien la EH,
2. P. 5. compuesta de la primera, y quinta igualmente multiplice de la segunda B, como la FL, compuesta de la tercera, y sexta es multiplice de la quarta D. Asimismo, porque la primera EH, es igualmente multiplice de la segunda B, como la tercera FL de la quarta D, y la quinta HI, igualmente multiplice de

de la ſegunda B como la ſexta LM de la quarta D, ſerà (b) la EI, compueſta de la primera, y quinta igualmente multiplice de la ſegunda B, como la FM, compueſta de la tercera, y ſexta es multiplice de la quarta D: luego ſi la primera magnitud, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar. (b) 2.p.5.

THEOREMA 4. PROPOSICION 4.

Si la primera magnitud a la ſegunda tiene la miſma proporcion que la tercera a la quarta: tambien las igualmente multiplices de la primera, y de la tercera a las igualmente multiplices de la ſegunda, y de la quarta, ſegun qualquiera multiplicacion, tendrân la miſma proporcion.

Tenga la primera magnitud A à la ſegunda B la miſma proporcion que la tercera C a la quarta D: y tomenſe de la primera A, y de la tercera C qualeſquiera igualmente multiplices las E, F. Iten, de la ſegunda B, y de la quarta D otras qualeſquiera igualmente multiplices las G, H. Digo que la E multiplice de la primera A a la G, multiplice de la ſegunda B, tiene la miſma proporcion que la F multiplice de la tercera C a la H, multiplice de la quarta D. Tomenſe de las E, y F, qualeſquiera igualmente multiplices las I, K. Iten, de las G, H, otras qualeſquiera igualmente multiplices las L, M; y porque la primera E es igualmente multiplice de la ſegunda A, como la tercera F de la quarta Fig. 4.

C,

C, y se tomàron las I,K, igualmente multiplices
(a) 3.P 5. de la primera E, y de la tercera *F*, seràn (a) las I, K igualmente multiplices de la segunda *A*, y de la quarta C: Por la misma razon las L, M son igualmente multiplices de las *B*, y D; y porque es como la primera A a la segunda *B*, assi la tercera C a la quarta D, y las I,K son igualmente multiplices de la primera A, y de la tercera C. Iten, las L, M igualmente multiplices de la segunda *B*, y de la
(b) 6.def.5. quarta D: luego (b) si la I multiplice de la primera es menor que la L multiplice de la segunda, tanbien la K multiplice de la tercera, es menor que la M multiplice de la quarta: y si igual igual, si mayor mayor: Y porque ay quatro cantidades, la primera E, la segunda G, la tercera *F*, la quarta H, y las igualmente multiplices I,K de la primera *E*, y de la tercera *F* igualmente son menores, ó iguales, ó mayores que las L,M igualmente multiplices de la segunda G, y de la quarta H, como està demostrado: luego (b) es como la primera *E* a la segunda G, assi la tercera *F* a la quarta H: luego dadas quatro cantidades proporcionales, si se toman qualesquiera igualmente multiplices de la primera, y de la tercera, y otras qualesquiera igualmente multiplices de la segunda, y de la quarta, tambien los dichos multiplices quedaràn proporcionales, si se toman en la correspondencia que las cantidades dadas, que es lo que se avia de demostrar.

CO-

COROLARIO.

De aqui se demuestra la razon inversa: Sea la magnitud A a la B, como la C a la D. Digo, que invirtiendo tambien será como la B a la A, assi la D a la C. Tomense de las A, y C qualesquiera igualmente multiplices las E, F, y de las B, y D otras qualesquiera igualmente multiplices las G, H: luego (a) las E, F igualmente multiplices de la primera, y de la tercera a las G, H igualmente multiplices de la segunda, y quarta tienen vna misma proporcion; y si la E es menor que la G, tambien la F es menor que la H, y si igual, igual: si mayor, mayor: luego al contrario, quando la G es mayor que la E, tambien la H es mayor que la F, y si igual, igual, si menor, menor: aviendo pues quatro cantidades, la primera B, la segunda A, la tercera D, la quarta C, y las igualmente multiplices G, H de la primera, y de la tercera igualmente son menores, ò iguales, ò mayores q̃ las multiplices E, F de la segunda, y de la quarta: luego (b) la primera B a la segunda A es como la tercera D a la quarta C, que es lo que se auia de demostrar.

Fig. 5. (a) 4. P. 5. (b) 6. def.

THEOREMA 5. PROPOSICION 5.

Si vna magnitud es igualmente multiplice de otra, como la quitada de la quitada, tambien la residua será igualmente multiplice de la residua, como la entera lo es de la entera.

Sea la magnitud *AB* igualmente multiplice de la CD, como la quitada AE de la quitada CF: Digo, que la residua *EB* es igualmente multiplice de la residua FD, como la entera *AB* lo es de la entera CD, ó como la quitada AE de la quitada CF. Sea la residua *EB* igualmente multiplice de la GC, como la *AB* lo es de la CD, ò como la AE de la CF; y porq̃ las AE, *EB* son igualmẽte

Fig. 6.

(a) 1.p.5. multiplices de las CF,GC, serà (a) la compuesta AB igualmente multiplice de la compuesta GF, como la vna AE, lo es de la vna CF: pero la AB tambien es igualmente multiplice de la CD como la AE de la CF por la suposicion: luego la AB es igualmente multiplice de la *GF*, y de la CD: lue-
(b) 6.axi.1. go (b) la GF es igual a la CD, y quitando de entrambas la CF comun, quedarà la magnitud GC igual a la FD, y serà la EB igualmente multiplice de la FD, y de la GC; pero la EB de la GC es igualmente multiplice como la AE de la CF, ò como la AB de la CD: luego tambien la misma residua EB es igualmente multiplice de la residua FD, como la entera AB lo es de la entera CD, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 6. PROPOSICION 6.

Si dos magnitudes son igualmente multiplices de otras dos, y de las primeras se quitan algunas igualmente multiplices de las segundas, las residuas de las primeras, ò seràn iguales a las segundas, ò igualmente multiplices dellas.

Fig.7. Sean las magnitudes AB, CD igualmente multiplices de las E, y F, y quitense las AG, CH igualmente multiplices de las mismas E, y F: Digo, que las residuas GB, y HD, ò son iguales a las E, y F, ó igualmente multiplices dellas. Porque siendo la AB multiplice de la E, y la quitada AG multipli-

ce de la misma E, la residua GB, ó es igual á la E, ó multiplice della: porque si no fuera assi, vna magnitud, ò desigual, ó no multiplice, añadida a vna multiplice compusiera vna magnitud multiplice (a) lo que no puede ser. Sea pues lo primero la GB igual a la E: Digo, que la HD tambien es igual a la F. Tomese la IC igual a la F; y porque la primera AG es igualmente multiplice de la segunda E, como la tercera CH de la quarta F, y la quinta GB igual a la segunda E, como la sexta IC a la quarta F, serà (b) la magnitud AB compuesta de la primera, y quinta igualmente multiplice de la segunda E, como la IH compuesta de la tercera, y sexta, es multiplice de quarta F; pero la CD de la F, tambien se supone igualmente multiplice como la AB de la E: luego las IH, y CD son igualmente multiplices de la magnitud F: luego (c) las magnitudes IH, CD son iguales entre si, y quitando de entrambas la CH comun, quedarà la IC igual a la HD; pero la IC se tomò igual a la F: luego la AD tambien es igual a la F.

(a) 2. def. 5.

(b) 2. P. 5.

(c) 6. ax. 1.

Sea lo segundo la GB multiplice de la E: Digo, que la HD es igualmente multiplice de la F. Porque tomese la IC assi multiplice de la F, como la GB lo es de la E, y se demostrarà por la misma razon como antes que las magnitudes IC, y HD son iguales: luego (c) son igualmente multiplices de la F: pero la IC es assi multiplice de la F como la

GB de la E : luego tambien la HD es igualmente multiplice de la F, como la GB de la E: luego si dos magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 7. PROPOSICION 7.

Iguales magnitudes tienen la misma proporcion a otra tercera : y vna magnitud a dos iguales tiene la misma proporcion.

Fig. 8. Sean las magnitudes A, y B iguales entre si, y dese otra tercera magnitud C. Digo, que es como A a C, assi B a C; y como la C a la A, assi la C a la B. Tomense de la primera A, y de la tercera B, qualesquiera igualmente multiplices D, y E, que seràn (a) iguales entre si: y de la segunda, y quarta C, tomese otra qualquiera multiplice F. Y por quanto las D, y E son iguales entre si, seràn igualmente, ò menores, ò iguales, ò mayores que la F : luego (b) es como la primera A a la segunda C, assi la tercera B a la quarta C; y invirtiendo (c) como la C a la A, assi la misma C a la B: luego iguales magnitudes, &c. que es lo que se auia de demostrar.

(a) 6. ax. 1.
(b) 6. def. 5.
(c) Cor. 4. P. 5.

SCHOLIO.

Lo mismo se entiende, si en lugar de la magnitud C se dàn dos magnitudes iguales C, y D; porque la misma razon que las A, y B tienen a la C, tendrán (a) a su igual D: y al contrario, la misma razon que la C tiene a las A, y B, tendrà la D su igual a las mismas A, y B; luego las

(a) 7. P. 5.

A,	B.
C,	D,

mag-

magnitudes que a otras iguales tienen la misma razon; son iguales entre si: y si magnitudes iguales tienen la misma proporcion a algunas magnitudes, ellas tambien son iguales entre si.

THEOREMA 8. PROPOSICION 8.

De dos magnitudes desiguales, la mayor a otra tercera tiene mayor proporciõ que la menor; pero la tercera magnitud a la menor de las dos tiene mayor proporcion que a la mayor.

Sean la magnitud mayor AB, y la menor C, y otra tercera D: digo, que comparando las dos cantidades con la tercera, la mayor AB a la D tiene mayor proporcion, que la menor C a la misma D; pero comparãdo la tercera magnitud D con las dos dadas, tiene esta misma D mayor proporcion con la menor C, que con la mayor AB. En la mayor AB tomese la AE igual a la menor C, y tomense de las EB, y AE igualmente multiplices, hasta que la GF multiplice de la EB sea mayor que la D, y la HG multiplice de la AE no sea menor que la D, sino ò mayor, ò igual. Y por quãto las dos magnitudes FG, GH son igualmente multiplices de las dos EB, y AE, serà (c) la compuesta FH assi multiplice de la entera *AB*, como la HG lo es de la AE ò de su igual C. Tomese tambien de la D la IK multiplice proximamente mayor que la HG (*de suerte, que si la dupla de la D es mayor que la HG, no se repita mas la D, y si la dupla no es mayor, repitase la D hasta que sea mayor*) y de la IK cortese la LK igual a la D, y quedarà la IL no mayor que la HG: por-

Fig. 9.

(b)
(c) 1. l. 5.

(porque si la IL quedàra mayor que la HG, no huviera sido la IK multiplice de la D proximamente mayor que la HG, si no la IL tambien fuera mayor que la HG:) luego la HG; ò serà igual a la IL, ò mayor que la IL. Y porque la FG es mayor que la D, ò que su igual LK, y la HG no menor que la IL; serà la *FH* compuesta de las *FG*, HG mayor que la IK. Y por quanto las *FH*, HG son igualmente multiplices de la primera AB, y de la tercera AE, ò de su igual C, y la IK multiplice de la segunda, y de la quarta D; pero la *FH* multiplice de la primera AB, es mayor que la IK multiplice de la segunda D, y la HG multiplice de la tercera, C, no es mayor si no menor por la suposicion que la IK multiplice de la quarta D: luego (d) la primera AB a la segunda D tiene mayor proporcion que la tercera C a la quarta D.

(d) 8. def. 5.

Pero al contrario: porque esta demostrado, que la IK multiplice de la primera D, es mayor que la HG multiplice de la segunda C, pero la IK multiplice de la tercera D, no es mayor, sino menor que la *FH* multiplice de la quarta AB: luego (d) la primera D a la segunda C tiene mayor proporcion, que la tercera D a la quarta AB: luego si dos magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEO-

THEOREMA 9. PROPOSICION 9.

Las magnitudes que à vna misma tienen la misma proporcion son iguales entre si: y si vna magnitud tiene la misma proporcion a algunas magnitudes q estas son iguales entre si.

Tengan las magnitudes A, y B la misma proporcion à la magnitud C. Digo que las magnitudes A, y B son iguales entre si. Porque si no son iguales, sea vna dellas como la A mayor, y la B menor: luego (a) la mayor A a la C tendrà mayor proporcion que la menor B a la misma C lo que es contra lo supuesto: luego A, y B no pueden ser desiguales, sino iguales.

A B
8 8
C
4

(b) 8. 5.

(a) 8. 5.

Lo segundo tenga la C la misma proporcion a la A que a la B: Digo que A, y B son iguales. Porque si no son iguales, sea vna dellas como la A mayor, y la B menor: luego (a) la C a la menor B, tendrà mayor proporcion, que a la mayor A, lo que es contra lo supuesto: luego A, y B no son desiguales, sino iguales: luego las magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 10. PROPOSICION 10.

De dos magnitudes la que a otra tercera tiene mayor

proporcion, es mayor: y destas mismas dos magnitudes a la que otra tercera tiene mayor proporcion, es menor.

Lo primero, tenga la A a la C mayor proporcion, que la B a la misma C. Digo, que la A es mayor que la B; porque si no es assi, ó será la A igual a la B, y tendràn (c) la misma proporcion a la tercera C lo que es contra lo supuesto; ò la A serà menor que la B, y (d) tendrà la A menor proporcion a la C, que la B a la misma C, que tambien es contra lo supuesto: luego la A, ni es igual, ni menor que la B, sino mayor.

A	B
8	8
C	
4	

(c) 7. p. 5.

(d) 8. p. 5.

Lo segundo, tenga la C mayor proporcion a la B, que a la A. Digo, que la B es menor que la A, porque si la B fuera igual a la A, la C tuviera la misma proporcion (c) a la B, y a la A, lo que es contra lo supuesto; y si la B fuera mayor que la A, la C tuviera menor proporcion (d) a la mayor B que a la menor A, lo que tambien es contra lo supuesto: luego la B, que ni es igual, ni mayor que la A, es menor que la A: luego dos magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 11. *PROPOSICION* 11.

Las razones que son vnas mismas, ò iguales, ò semejantes a otra tercera razon, son las mismas, ò iguales, ò semejantes entre si.

Sean

Sean las razones de la magditud A a la B, y de la C a la D, como la de la E a la F: digo, que la razon de la magnitud A a la B, tambien es la miſma, ò igual, ò ſemejante a la de la C a la D. Tomenſe de las antecedentes A, E, C, igualmente multiplices, las G, I, H, y de los conſequentes B, F, D, otras igualmente multiplices K, L, M.

Y porquanto es como la primera A a la ſegundaB, aſſi la tercera E a la quarta F: luego (a) las G, y I, igualmente multiplices de la primera A, y de la tercera E, ſon igualmente menores, ò iguales, ò mayores que los multiplices K, y M de la ſegunda B, y de la quarta F. Aſſi miſmo, porque es como la E a la F, aſsi la C a la D: luego las igualmente multiplices I, y H de la primera E, y de la tercera C ſon igualmente menores, ò iguales, ò mayores que las M, y L, igualmente multiplices de la ſegunda F, y de la quarta D: luego ſiempre que la G, multiplice de la primera A, es menor que la K, multiplice de la ſegunda B, tambien la H, multiplice de la tercera C, es menor que la L, multiplice de la quarta D; y ſi igual, igual; ſi mayor, mayor: luego (a) la primera A a la ſegunda B tiene la miſma razon, que la tercera C a la quarta D: luego las razones, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

G.	I.	H.
8.	12.	40.
A.	E.	C.
2.	3.	10.
B.	F.	D.
4.	6.	20.
K.	L.	M.
40.	60.	200.

(a) 6.def 5.

Otra demonstracion.

Porque siendo la A a la B, como la E a la F, luego la A (a) *contiene a la B (ò està contenida della) de la misma manera, como la E a la F : y por ser la C a la D, como la E a la F : luego la C contiene a la D (ò està contenida della) de la misma manera, como la E a la F : luego tambien la A contiene de la misma manera a la B (ò està contenida della) como la C a la D: luego es* (a) *como la A a la B, assi la C a la D.*

(a) not. 6. def. 5.

A.	B.
E.	F.
C.	D.

SCHOLIO.

De la misma manera las razones, que son vnas mismas à otras razones iguales, son entre si vnas mismas, ò iguales. Como si se dà, como A a B, assi C a D, y E a F, como A a B, y G a H, como C a D, serà tambien E a F, como G a H. Porque E a F (b) *es como C a D, y G a H se dà como C a D : luego* (b) *E a F es como G a H, que es lo que se avia de demostrar.*

(b) 11. p. 5.

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.

THEOREMA 12. *PROPOSICION* 12.

Dadas las magnitudes proporcionales en qualquier numero, la razon que vna antecedente tiene a vna consequente, la mis-

miſma tienen todas las antecedentes juntas, a todas las conſequentes juntas.

Sean las magnitudes A, B, C, D, E, F proporcionales, la A a la B, como la C a la D, y tambien la E a la F: digo, que como la antecedente A a la conſequente B, aſsi las A, C, E juntas, a las B, D, F juntas. Tomenſe las G, H, I, igualmente multiplices de las antecedentes A, C, E, y las K, L, M, igualmente multiplices de las B, D, F conſequentes; y ſeràn (a) las G, H, I juntas, igualmente multiplices de las A, C, E juntas, como la G es multiplice de la A; y las K, L, M juntas ſeràn aſſi multiplices de las B, D, F juntas, como la K lo es de la B. Y porque es como la primera A a la ſegũda B, aſsi la tercera C a la quarta D, y otra tercera E a otra quarta F: luego (b) las G, H, I, igualmente multiplices de la primera A, y de las terceras C, y E, igualmente ſon menores, ò iguales, ò mayores que las K, L, M, igualmente multiplices de la ſegunda B, y de las quartas D, y F: luego ſi la G es menor, ò igual, ò mayor que la K, tambien G, H, I juntas, ſon menores, ò iguales, ò mayores que las K, L, M juntas: luego (b) es como la primera A a la ſegunda B, aſsi las A, C, E juntas, a las B, D, F juntas: luego dadas, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

G.	H.	I.
4.	6.	10.
A.	C.	E.
2.	3.	5.
B.	D.	F.
6.	9.	15.
K.	L.	M.
18.	27.	45.

(a) 1. P. 5.

(b) 6. def. 5.

THEO-

THEOREMA 13. PROPOSICION 13.

Si la primera magnitud a la segunda tiene la misma razon, que la tercera a la quarta; y la tercera a la quarta tiene mayor razon, que la quinta a la sexta; tambien la primera a la segunda tendrà mayor razon, que la quinta a la sexta.

Sea la primera A a la segunda B, como la tercera C a la quarta D; y la C a la D tenga mayor razon, que la quinta E a la sexta F: digo, que la primera A a la segunda B tambien tiene mayor razon, que la quinta E a la sexta F. Tomense las G, H, I, igualmente multiplices de las A, C, E; y las K, L, M, igualmente multiplices de las B, D, F.

G.	H.	I.
30.	60.	90.
A.	C.	E.
3.	6.	9.
B.	D.	F.
4.	8.	20.
K.	L.	M.
20.	40.	100.

Y por quanto es como la primera A a la segunda B, assi la tercera C a la quarta D: luego (a) las G, y H igualmente multiplices de la primera A, y de la tercera C, igualmente son menores, ò iguales, ó mayores, que las K, y L, igualmente multiplices de la segunda B, y de la quarta D; pero por quanto la C a la D tiene mayor proporcion que la E a la F, podrà la H ser mayor (b) que la L, y la I no ser mayor que la M, sino igual, ó menor: luego quando la G es mayor que la K, podrà

(a) 6. def. 5.

(b) 8. def. 5.

drà la I ser no mayor que la M. Y porque ay quatro cantidades A, B, E, F, y tomando igualmente multiplices de la primera A, y de la tercera E, y otras igualmente multiplices de la segunda B, y de la quarta F, quando el multiplice de la primera es mayor que el multiplice de la segunda, el multiplice de la tecera no es necessariamente mayor que el multiplice de la quarta, como està demostrado: luego (c) la primera A a la segunda B tiene mayor proporcion que la E quinta a la F sexta: luego si la primera, &c. que es lo que se avia de demostrar. (c) 8. *def.* 5.

SCHOLIO.

Si la proporcion de la C tercera a la D quarta fuere menor, que la de la E quinta a la F sexta, serà tambien la proporcion de la A primera a la B segunda menor, que la de la E quinta a la F sexta. Porque si la C a la D tiene menor proporcion, que la E a la F; esto es, si la E primera a la F segunda tiene mayor proporcion, que la C tercera a la D quarta, podrà la I ser mayor (c) *que la M, y la H no ser necessariamente mayor que la L; esto es, la G no ser mayor que la K: luego* (c) *la E a la F tiene mayor proporcion, que la A a la B; esto es, la A a la B tendrà menor proporcion, que la E a la F.*

THEO-

THEOREMA 14. PROPOSICION 14.

Si la primera magnitud a la segunda tiene la misma proporcion que la tercera a la quarta; y la primera magnitud es mayor que la tercera, tambien la segunda es mayor que la quarta; y si la primera es igual a la tercera, la segunda es igual a la quarta; y si menor, menor.

Sea la primera A a la segunda B, como la tercera C a la quarta D, y sea lo primero la A mayor que la C: digo, que la B es mayor que la D. Porque por quanto la A es mayor que la C tendrà (a) la mayor A a la B mayor proporcion, que la menor C a la misma B; y porque es como la primera C a la segunda D, assi la tercera A a la quarta B; pero la A a la B tiene mayor proporcion que la quinta C a la sexta B, como està demostrado; tambien (b) la primera C a la segunda D, tendrà mayor proporcion que la quinta C a la sexta B: luego (c) la B es mayor que la D.

A. B.
C. D.
C.A.C.
D. B.B.

(a) 8. P. 5.
(b) 13. P. 5.
(c) 10. P. 5.

Sea lo segundo la A igual a la C: digo, que la B es igual a la D. Porque siendo la A igual a la C, serà (d) la A a la B, como la C a la misma B; pero como la A a la B, assi se dà la C a la D: luego (e) es como la C a la D, assi la misma C a la B: luego las B, y D (f) son iguales entre si; ò siendo los antecedentes A, y C iguales, y siendo como A a B, assi

(d) 7. P. 5.
(e) 11. P. 5.
(f) 9. P. 5.

afsi C a D: luego (g) los confequentes *B*, y D fon iguales. (g) 9. P.5.

Sea lo tercero la *A* menor que la C: digo, que la *B* es menor que la D. Porque la mayor C tendrà a la *B* mayor proporcion, que la menor A a la mifma *B*; efto es (h) que la C a la D: luego (i) la *B* es menor que la D: luego fi la primera, &c. que es lo que fe avia de demoftrar. (h) Schol. 13. P.5. (i) 10. P.5.

THEOREMA 15. *PROPOSICION* 15.

Las partes, y los igualmente multiplices tienen vna mifma razon.

Sean las partes A, y *B*, y las igualmente multiplices C, D, y EF: digo, que la CD a la EF tiene la mifma razon, que la A a la *B*. Porque fiendo las CD, EF igualmente multiplices de las A, y *B*, la A eftà igualmente contenida en la CD, como la *B* en la EF, partafe pues la CD en las partes CG, GH, HD iguales a la A, y la EF en las partes EI, IK, KF iguales a la *B*, y ferà (a) la CG a la EI, como la A a la *B*, por fer la CG igual a la A, y la EI a la *B*; afsimifmo ferà la GH a la IK, y HD a la KF, como la A a la *B*: luego (b) todas juntas CG, GH, HD, ó la CD a todas juntas EI, IK, KF, ò a la EF, feran como la A a la *B*: luego las partes, &c. que es lo que fe avia de demoftrar. Fig. 10. (a) 7. P.5. (b) 12. P.5.

THEO-

THEOREMA 16. PROPOSICION 16.

Si quatro magnitudes son proporcionales, tambien alternando seràn proporcionales.

Sea la magnitud A a la B, como la C a la D: digo, que alternando serà como la A a la
C, assi la B a la D. Tomense de la primera A, y de la segunda B, igualmente
multiplices, las E, y F; y de la tercera
C, y de la quarta D, otras igualmente
multiplices las G, y H: luego la E a la
(a) F serà (a) como la A a la B, esto es (b)
15 p.5. (b) como la C a la D; pero la G a la H tam-
11. p.5 bien es (a) como la C a la D: luego es
(b) como la E a la F, assi la G a la H: y
si la primera E es menor, que la tercera G, la segū-
(c) da F (c) serà menor, que la quarta H; y si igual,
14. p. 5. igual; si mayor, mayor: aviendo pues quatro magnitudes, la primera A, la segunda C, la tercera B;
y la quarta D, y las igualmente multiplices E, y F,
de la primera A, y de la tercera B, siendo igualmente menores, ó iguales, ò mayores, que las igualmente multiplices G, y H de la segunda C, y de la
(d) quarta D, serà (d) como la primera A a la segun-
6. def. 5. da C, assi la tercera B a la quarta D, que es lo que
se avia de demostrar.

E.	F.
40.	60.
A.	B.
4.	6.
C.	D.
8.	12.
G.	H.
16.	24.

THEO-

THEOREMA 17. PROPOSICION 17.

Si las magnitudes compuestas son proporcionales, tambien divididas seràn proporcionales.

Sea como la AB a la CB, assi la DE a la FE: digo, que dividiendo serà como la AC a la CB, assi la DF a la FE. Tomense de las AC, CB, DF, FE, igualmente multiplices las GH, HI, KL, LM, y serà (a) la GI, assi multiplice de la AB, como la GH lo es de la AC, ò como la KL de la DF; pero la KM tambien es (a) igualmente multiplice de la DE, como la KL de la DF: luego las GI, KM son igualmente multiplices de las AB, y DE. Tomense tambien las IN, MO, igualmente multiplices de las CB, FE, y por quanto la primera HI es igualmente multiplice de la segunda CB, como la tercera LM de la quarta FE, y la quinta IN, igualmente multiplice de la segunda CB, como la sexta MO de la quarta FE, serà (b) la HN compuesta de la primera, y quinta, igualmente multiplice de la segũda CB, como la LO, compuesta de la tercera, y sexta lo es de la quarta FE. Y por quanto se dà como la primera AB a la segunda CB, assi la tercera DE a la quarta FE: luego (c) las GI, KM igualmente multiplices de la primera, y de la tercera, igualmente son menores, ó iguales, ò mayores, que las HN, LO, igualmente multiplices de la segun-

Fig. 11.

(a) 1. t. 5.

(b) 2. P. 5.

(c) 6. def. 5.

da, y de la quarta: luego quitando de las GI, y HN la HI comun, y de las KM, LO, la LM comun, tambien las GH, y KL quedaràn igualmente menores, ò iguales, ó mayores, que las IN, MO. Aviendo, pues, quatro cantidades, la primera AC, la segunda CB, la tercera DF, la quarta FE, y las GH, KL, igualmente multiplices de la primera AC, y de la tercera DF, siendo igualmente menores, ò iguales, ò mayores, que las IN, MO igualmente multiplices de la segunda CB, y de la quarta FE serà (e) como la primera AC a la segunda CB, assi la tercera DF a la quarta FE: que es lo que se avia de demostrar.

(e) 6. def. 5.

SCHOLIO.

De aqui se demuestra lo primero: La division conversa de razon. *Si se dà como la AB a la CB, asi la DE a la FE, que serà, como la CB a la AC, asi la FE a la DF. Porque siendo como la AB a la CB, asi la DE a la FE, serà (f) dividiendo como la AC a la CB, asi la DF a la FE: luego invirtiendo serà, como la CB a la AC, asi la FE a la DF.*

Fig. 11.

(f) 17. p. 5.

Lo segundo: La division contraria de razon: *dado, que sea como la AC a la AB, asi la DF a la DE, que tambien serà como la AC a la CB, asi la DF a la FE; porque por quanto es como la AC a la AB, asi la DF a la DE serà (g) invirtiendo como la AB a la AC, asi la DE a la DF: luego dividiendo (f) como la CB a la AC, asi la FE a la DF, y invirtiendo como la AC a la CB, asi la DF a la FE, que es lo que, &c.*

(g) Cor. 4. p. 5.

THEO-

THEOREMA 18. PROPOSICION 18.

Si las magnitudes diuididas son proporcionales, tambien compuestas seràn proporcionales.

Sea como la AB a la BC, assi la DE a la EF: digo, que componiendo tambien serà como la AC a la BC, assi la DF a la EF. Porque si no es como la AC a la BC, assi la DF a la EF, tendrà (a) la DF a otra magnitud menor, ó mayor que la EF, la misma proporcion que la AC a la BC. Tenga lo primero (si es possible) la DF a la GF (menor que la EF) la misma proporcion que la AC a la BC: y porque se dize, que es como la AC a la BC, assi la DF a la GF, serà diuidiendo (b) como la AB a la BC, assi la DG a la GF; pero como la AB a la BC, assi se supone ser la DE a la EF: luego (c) es como la DG a la GF, assi la DE a la EF; pero la primera DG es mayor que la tercera DE: luego (d) la segunda GF serà mayor que la quarta EF, la parte que su todo, lo que no puede ser.

Fig. 12.
(a) 1. ax. 5.
(b) 17. p. 5.
(c) 11. p. 5.
(d) 14. p. 5.

Tenga lo segundo la DF a la HF (mayor que la EF) la misma proporcion que la AC a la BC. Y porque se dize, que es como la AC a la BC, assi la DF a la HF, serà diuidiendo (b) como la AB a la BC, assi la DH a la HF; pero como la AB a la BC, assi se supone ser la DE a la EF: luego es (c) como la DH a la HF, assi la DE a la EF; pero la primera DH es menor q̄ la tercera DE: luego (d) la segunda

ſerà menor que la quarta EF, el todo menor que ſu parte, lo que no puede ſer: luego la DF a ninguna otra ſino a la EF puede tener la miſma proporcion, que la AC a la BC: luego ſi las magnitudes, &c. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

SCHOLIO.

Fig. 12. *De aqui ſe demueſtra lo primero:* la razon compueſta converſa; *porque ſi ſe dà como la AB a la BC, aſsi la DE a la EF ſerà tambien como la AC a la AB, aſsi la DF a la DE. Porque ſiendo como la AB a la BC, aſsi la DE a la EF, ſerà invirtiendo, como la BC a la AB, aſsi la EF a la* (g) 18. P.5. *DE: luego* (g) *componiendo como la AC a la AB, aſsi la DF a la DE.*

Lo ſegundo: la razon compueſta contraria: *Porque ſiendo como la AB a la BC, aſsi la DE a la EF, ſerà tambien como la AB a la AC, aſsi la DE a la DF. Porque ſi ſe dà como la AB a la BC, aſsi la DE a la EF, ſerà invirtiendo, como la BC a la AB, aſsi la EF a la DE: luego componiendo como la AC a la AB, aſsi la DF a la DE, y invirtiendo como la AB a la AC, aſsi la DE a la DF, que es lo que, &c.*

THEOREMA 19. PROPOSICION 19.

Si el todo es al todo, como la parte a la parte, tambien el reſiduo al reſiduo ſerà como el todo al todo.

Sea

Sea como la magnitud entera AB a la entera CD, afsi la parte AE a la parte CF: digo, que el refiduo EB al refiduo FD, es como la entera AB a la entera CD. Porque por quanto es como la AB a la CD, afsi la AE a la CF ferà alternando (a) como la AB a la AE, affi la CD a la CF, y dividiendo (b) como la EB a la AE, afsi la FD a la CF, y alternando la EB a la FD, como la AE a la CF, efto es como la AB a la CD: luego fi el todo, &c. que es lo que fe avia de demoftrar. Fig. 13. (a) 16. P. 5. (b) 17. P. 5.

COROLARIO.

De aqui fe figue el modo de arguir, que fe llama *Razon converfa en la def. 16.* Sea como la AB a la CB, afsi la DE a la FE: digo, que por la razon converfa ferà, como la AB a la AC, afsi la DE a la DF. Porque por fer como la AB a la CB, afsi la DE a la FE, ferà diviendo (b) la AC a la CB, como la DF a la FE, y invirtiendo la CB a la AC, como la FE a la DF: luego coponiendo (c) ferà, como la AB a la AC, afsi la DE a la DF: que es lo que, &c. Fig. 14. (c) 18. P. 5.

THEOREMA 20. PROPOSICION 20.

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero en proporcion ordenada, que cada dos de entrambas partes tengan vna mifma razon: fi la primera es mayor que la tercera; la quarta ferà tambien mayor que la fexta: y fi igual, igual; fi menor, menor.

Sean las tres magnitudes A, B, C, y otras tantas D, E, F, y fea como la A a la B, afsi la D a la E, y como la B a la

A.B.C. D.E.F.

C,

C, assi la E a la *F*: digo lo primero, que si la primera A es mayor que la tercera C, la quarta D tambien es mayor que la sexta *F*. Porque por ser la A
(a) mayor que la C tendrà (a) la A a la B mayor pro-
8.P.5. porcion, que la C a la misma B; pero como la A a
(b) la B, assi se dà la D a la E: luego (b) la D a la E tie-
13.P.5. ne tambien mayor proporcion que la C a la B; pero como la C a la B, assi es invirtiendo la *F* a la E (por que se dà como B a C, assi E a *F*, y invirtiendo como C a B, assi la F a la E:) luego la D a la E tiene mayor proporcion, que la F a la E: luego (a) la D es mayor que la F.

Digo lo segundo, que si la primera A es igual a la tercera *C*, la quarta D es igual a la sexta F. Por-
(c) que por ser la A igual a la *C*, serà (c) como la A a
7.P.5. (d) la *B*, esto es como la D a la E, assi la C a la *B*, esto
11.P.5. es invirtiendo, assi la F a la E: luego (d) es como
(e) la D a la E, assi la F a la misma E: luego (e) la D es
9.P.5. igual a la F.

Digo lo tercero, que si la A es menor que la C, la D tambien es menor que la F. Porque por ser la A menor que la C, tendrà (a) la A a la *B*, esto es la D a la E menor proporcion, que la C a la misma *B*; esto es invirtiendo, que la F a la E: luego la D a la
(f) *Schol.* E (f) tiene menor proporcion que la F a la E: lue-
13.P.5. go (g) la D es menor que la F: luego dadas tres
(g) 10.P.5. magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEO-

THEOREMA 21. PROPOSICION 21.

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero, que cada dos de entrambas partes tengan vna misma razon, y estèn en la proporcion perturbada; si la primera es mayor que la tercera, serà la quarta mayor que la sexta; y si igual, igual; si menor, menor.

Sean las tres magnitudes A, *B*, *C*, y otras tantas *D*, E, *F*, y sea como la primera A a la segunda *B*, assi la E a la F, y como la *B* a la *C*, assi la *D* a la *E*: digo lo primero, que si la A es mayor que la *C*, la *D* tambien es mayor que la F. Porque siendo la A mayor que la *C*, tendrà la A a la *B* (a) mayor proporcion, que la C a la misma B; pero como la A a la B, assi es la *E* a la F: luego (b) la *E* a la *F* tiene mayor proporcion que la *C* a la *B*; pero como la *C* a la B, assi es invirtiendo la *E* a la *D*: luego la *E* a F tiene mayor proporcion, que la misma *E* a la *D*; luego (c) la *D* es mayor que la F.

A.B.C. *D.E.F.*

(a) 8. P. 5.
(b) 13. P. 5.
(c) 10. P. 5.

Digo lo segundo, que si la A es igual à la *C*, la *D* tambien es igual a la F. Porque siendo la A igual a la *C*, serà [d] como la A a la B, esto es [e] como la *E* a la F, assi la *C* a la misma B, esto es invirtiendo assi la misma E a la *D*: luego es como la E a la F, assi la misma E a la *D*, y serà la *D* igual a la F.

[d] 7. P. 5.
[e] 11. P. 5.

Digo

Digo lo tercero, que si la A es menor que la C, la D tambien serà menor que la *F*. Porque siendo
(f) 8. P. 5. la A menor que la C, tendrà la A a la B (f) esto es
(g) 13. P. 5. la E a la *F* (g) menor proporcion, que la C a la misma B, esto es invirtiendo, que la misma E a la D: luego la E a la *F* tiene menor proporcion, que la
(h) 10. P. 5. misma E a la D: luego (h) la D es menor que la *F*: luego dadas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 22. PROPOSICION 22.

Dadas algunas magnitudes, y otras en igual numero, en proporcion ordenada, que cada dos de entrambas partes tengan la misma razon: tambien por igualdad de razon, tendràn la misma proporcion.

Sean lo primero tres magnitudes A, B, C, y otras tantas D, E, *F*, y sea como la A a la B, assi la D a la E, y como la *B* a la C, assi la E a la *F*: digo, que por igualdad de razon tambien es, como

A.	B.	C.	N.	D.	E.	F.	O.
3.	5.	15.	60.	6.	10.	30.	120.
G.	I.	L.		H.	K.	M.	
30.	10.	45.		60.	20.	90.	

la A a la C, assi la D a la *F*. Tomense de las A, y D, igualmente multiplices las GH, y de las *B*, E, otras igualmente multiplices, las I, K, y de las C, *F* las L, M. Y por quanto es como la primera A a la segunda *B*, assi la tercera D a la quarta E, serà tambien

bien (a) la G, multiplice de la primera A, a la I, multiplice de la segunda B, como la H, multiplice de la tercera D, a la K, multiplice de la quarta E. Por la misma razon por ser como la B a la C, asi la E a la F, serà tambien la I multiplice de la B, a la L, multiplice de la G, como la K, multiplice de la E, a la M, multiplice de la F. Y porque ay tres magnitudes G, I, L, y otras tres H, K, M, que tomadas de dos en dos estàn en la misma proporcion: luego (b) si la primera G es menor que la tercera L, tambien la quarta H es menor que la sexta M, y si igual, igual; si mayor, mayor. Y por quanto ay quatro cantidades: la primera A, la segunda C, la tercera D, la quarta F, y las G, H, igualmente multiplices de la primera A, y de la tercera D, igualmente son menores, ò iguales, ó mayores, que las L, M, igualmente multiplices de la segunda C, y de la quarta F: luego es (c) como la primera A a la segunda C, asi la tercera D a la quarta F.

(a) 4. p. 5.

(b) 20. p. 5.

(c) 6. def. 5.

Sean lo segundo mas magnitudes que tres, de suerte, que tambien sea como la C a la N, asi la F a la O: digo, que por igualdad de razon serà, como la A a la N, assi la D a la O. Porque està demostrado, que es, como la A a la C, asi la D a la F; y se supone, que la C a la N es como la F a la O: luego por la primera parte desta es como la primera A a la vltima N, asi la D a la O: luego dadas algunas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

SCHOLIO.

Si la primera a la fegunda tiene la mifma razon, que la tercera a la quarta; tambien las igualmente multiplices de la primera, y tercera a la fegunda, y quarta, y las igualmente multiplices de la fegunda, y quarta a la primera, y tercera, tendràn la mifma razon.

Sea A a B, como C a D, tomenfe las E, F, igualmente multiplices de las A, y C; y las G, H, igualmente multiplices de las B, D: y porque es como la E a la A, afsi la F a la C por la conftruccion, y como la A a la B, afsi la C a la D,
(d) *ferà (d) por igualdad de razon, como la E a*
22.p.5. *la B, afsi la F a la D. Afsimifmo, porque es como la G a la B, afsi la H a la D por la conftruccion; y como la B a la A, afsi la D a la C ferà por igualdad de razon, como la G a la A, afsi la H a la C, que es lo que, &c.*

E.	F.
12.	18.
A.	C.
4.	6.
B.	D.
2.	3.
G.	H.
8.	12.

THEOREMA 23. PROPOSICION 23.

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero, que cada dos de entrambos partes tengan vna mifma razon, y eftèn en la proporcion perturbada; tambien por igualdad de razon tendràn la mifma proporcion.

Sean las tres magnitudes A, B, C, y otras tres D,

E,

E, F, que estèn en la proporcion perturbada, como la A a la B, assi la E a la F, y como la B a la C, assi la D a la E: digo, que

A.	B.	C.	N.	D.	E.	F.	O.
3.	5.	15.		2.	6.	10.	
G.	H.	K.		I.	L.	M.	
30.	50.	45.		20.	18.	30.	

por la igualdad de razon tambien serà como la A a C, assi la D a la F. Tomense de las A, B, D, igualmente multiplices G, H, I, y de las C, E, F, otras igualmente multiplices, K, L, M, y serà (a) como la A a la B, assi la G a la H; pero como la A a la B, assi se da la E a la F: luego (b) es como la G a la H, assi la E a la F; esto es (a) assi la L a la M; y por quanto es como la B a la C, assi la D a la E, y como la B a la C (a) assi la H a la K: luego es como (b) la H a la K (b) assi la I a la L. Aviendo pues tres cantidades, G, H, K, y otras tres I, L, M, que tomadas de dos en dos tienen la misma proporcion perturbada: luego (c) si la G es menor que la K, la I serà menor, que la M, y si igual, igual, si mayor, mayor. Y por quanto ay quatro magnitudes, la primera A, la segunda C, la tercera D, la quarta F, y las G, I, igualmente multiplices de la primera A, y de la tercera D, igualmente son menores, ò iguales, ò mayores, que las K, M, igualmente multiplices de la segunda C, y de la quarta F, como està demostrado: luego (d) como la primera A a la segunda C, assi es la tercera D a la quarta F, que es, &c.

(a) 15. P. 5.
(b) 11. P. 5.
(c) 21. P. 5.
(d) 6. def. 5.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que dadas quatro cantidades proporcionales, como A, B, C, D si de la primera A se toma qualquier multiplice, como 2 A, y de la quarta D igual submultiplice, como $\frac{1}{2}$ D, quedarán

$$2 A.\ A.\ B{::}\ C.\ D.\ \tfrac{1}{2} D$$
$$\tfrac{1}{2} A.\ A.\ B{::}\ C.\ D.\ 2 D.$$

(a) 2 A. B::C. $\frac{1}{2}$ D. proporcionales. Porque como 2 A a A (a) assi es D a
15. P. 5. $\frac{1}{2}$ D, y como A a B, assi se dá C a D: luego (a) es como 2 A a B, assi C a $\frac{1}{2}$ D. Lo mismo será, si de la primera A se tomare algun submultiplice, y de la quarta D igual multiplice: ò si esto mismo se hiziere con la segunda B, y con la tercera C.

SCHOLIO.

Lo que se dize de tres magnitudes, se demuestra tambien de mas magnitudes que de tres: de suerte, que si se dà, como A a B, assi F a O, y como B a C, assi E a F, y como C a N, assi D a E: digo, que serà, como la A a la N, assi la D a la
(b)
23. P. 5. *O. Porque està demostrado, que serà (b) como la A a la C, assi la E a la O, y se dà, como la C a la N, assi la D a la E: luego (b) como la A a la N, assi serà la D a la O: que es lo que, &c.*

THEO-

THEOREMA 24. PROPOSICION 24.

Si la primera a la ſegunda tiene la miſma razon, que la tercera a la quarta; y ſi vna quinta a la ſegunda tiene la miſma razon que vna ſexta a la quarta: tambien la compueſta de la primera, y quinta a la ſegunda, tendrà la miſma razon, que la compueſta de la tercera, y ſexta a la quarta.

Sea la primera AB a la ſegunda C, como la tercera DE a la quarta F, y la quinta BG a la ſegunda C, como la ſexta EH a la quarta F: digo, que la AG compueſta de la primera, y quinta a la ſegunda C, tiene la miſma razon, que la DH, compueſta de la tercera, y ſexta a la quarta F. Porque por ſer la BG a la C, como la EH a la F, ſerà invirtiendo la C a la BG, como la F a la EH. Y por quanto es como la AB a la C, aſsi la DE a la F, y como la C a la BG, aſsi la F a la EH ſerà (a) como la AB a la BG, aſsi la DE a la EH: luego (b) componiendo como la AG a la BG, aſsi la DH a la EH: pero como la BG a la C, aſsi ſe dà la EH a la F: luego (a) por igualdad de razon es como la AG a la C, aſsi la DH a la F; que es lo que ſe avia de demoſtrar. Fig. 15. (a) 22. p. 5. (b) 18. p. 5.

SCHOLIO.

Si dos magnitudes a otras dos tienen la miſma proporcion, y algunas partes della tienen la miſma pro-

proporcion a las mismas: los residuos tendràn a las mismas la misma proporcion.

Fig. 15. *Sea como la entera AG a la C, assi la entera DH a la F, y la parte AB à la C, como la parte DE a la F: digo, que el residuo BG a la C es como el residuo EH a la F. Porque por quanto es, como AB a C, assi DE a F, serà invirtiendo C a AB, como F a DE; pero como AG a C, assi se dâ DH a F, y como C a AB, assi F a DE: luego (c) por igualdad de razon serà AG a AB, como DH a DE: luego (d) dividiendo como BG a AB, assi EH a DE. Y por quanto es BG a AB, como EH a DE, y AB a C, como DE a F, serà (c) por igualdad de razon BG a C, como EH a F, que es lo que se avia de demostrar.*

(c) 22.P.5.
(d) 17.P.5.

THEOREMA 25. PROPOSICION 25.

Dadas quatro magnitudes proporcionales, la maxima con la minima, son mayores que las otras dos.

Fig. 16. Sea como la AB a la CD, assi la E a la F, y sea la AB la maxima, y la F la minima: digo, que la AB, y F juntas son mayores que las CD, y E juntas. De la magnitud AB quitese la AG igual a la E, y de la CD la CH igual a la F, y serà la AG a la CH, como la E a la F, ò como la AB a la CD. Y por quanto es como la entera AB à la entera CD, assi la parte AG, a la parte CH, serà (a) tambien como la entera AB a la entera CD, assi el residuo GB al residuo HD; pero la AB (que es la maxima,) es mayor que la

(a) 19.P.5.

la CD: luego la GB tambien es mayor, que la HD. Y por quanto las AG, y E son iguales, si se les añaden las F, y CH, tambien iguales, a cada vna la suya, quedaràn las AG, y F juntas, iguales a las E, y CH juntas, luego si a entrambas se añaden las desiguales GB, HD, la mayor GB a las AG, y F, y la menor HD a las E, y CH, quedaràn las AB, y F mayores que las E, y CD: luego dadas quatro magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Las Proposiciones siguientes no son de los Elementos de Euclides; pero porque se sirven dellas los mayores Geometras, como Arquimedes, Apollonio, &c. y se citan como si fueran de los Elementos, estàn añadidas a este libro por Campano, y otros Comentadores.

THEOREMA 26. PROPOSICION 26.

Si la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que la tercera a la quarta, invirtiendo la segunda a la primera, tendrà menor proporcion, que la quarta a la tercera.

Tenga la A a la B mayor proporcion, que la C à la D: digo, que invirtiendo la *B* a la A tiene menor proporcion, que la D a la C. Sea la E a la *B*, como la C a la D, y tendrà la A a la *B* mayor proporcion,

A. C.
B. D.
E.

que

(a) que la E a la misma B: luego (a) la A es mayor que
10. P. 5. la E: luego (b) la B a la A tiene menor proporcion
(b) que la B a la E, esto es invirtiendo, que la D a la C,
8. P. 5. que es lo que se avia de demostrar.

SCHOLIO.

Si la primera a la segunda tiene menor proporcion que la tercera a la quarta, invirtiendo la segunda a la primera, tendrà mayor proporcion que la quarta a la tercera: La demonstracion es casi la misma.

THEOREMA 27. PROPOSICION 27.

Si la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que la tercera a la quarta; tambien alternando la primera a la tercera tendrà mayor proporcion que la segunda a la quarta.

Tenga la A a la B mayor proporcion, que la C a la D: digo, que alternando la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la B a la D. Sea la E a la B, como la C a la D, y tendrà la A a la B mayor proporcion qne la E a la misma B: luego la A (a) es mayor que la E: luego (b) la A a la C tiene mayor proporcion, que la E a la misma C; pero como la E a la C, assi es alternando la B a la D [porque E, B, C, D son proporcionales:] luego la A a la C tiene mayor proporcion, que la B a la D,

A. C.
B. D.
E.

que

que es lo que se avia de demostrar.

SCHOLIO.

De la misma suerte se demuestra, que si la primera a la segunda tiene menor proporcion, que la tercera a la quarta; tambien alternãdo la primera a la tercera tendrà menor proporcion, que la segunda a la quarta.

THEOREMA 28. PROPOSICION 28.

Si la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que la tercera a la quarta: tambien componiendo la primera con la segunda a la segunda, tendrà mayor proporcion, que la tercera con la quarta a la quarta.

Tenga la AB a la BC mayor proporcion, que la DE a la EF: digo, que componiendo la AC a la BC, tiene tambien mayor proporcion, que la DF a la EF. Sea la GB a la BC, como la DE a la EF, y tendrà la AB a la BC mayor proporcion, que la GB a la BC: luego la AB (a) es mayor que la GB; añadase a entrambas la BC comun, y serà la AC mayor que la GC: luego (b) la AC a la BC tiene mayor proporcion, que la GC a la misma BC; pero como la GC a la BC, assi es (c) componiendo la DF a la EF: luego la AC a la BC tiene mayor proporcion, que la DF a la EF, que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 17.

(a) 10. p. 5.
(b) 8. p. 5.
(c) 18. p. 5.

SCHOLIO.

De la misma manera : si la primera a la segunda tiene menor proporcion, que la tercera a la quarta ; tambien componiendo la primera con la segunda a la segunda, tendrà menor proporcion, que la tercera con la quarta a la quarta.

THEOREMA 29. PROPOSICION 29.

Si la compuesta de la primera, y de la segunda, a la segunda tiene mayor proporcion, que la compuesta de la tercera, y de la quarta a la quarta: tambien dividiendo la primera a la segunda, tendrà mayor proporcion, que la tercera a la quarta.

Tenga la AC a la BC mayor proporcion, que la
Fig. 17. DF a la EF: digo, que dividiendo la AB a la BC, tiene tambien mayor proporcion, que la DE a la EF. Sea la GC a la BC, como la DF a la EF, y tendrà la AC a la BC mayor proporcion, que la GC a la BC:
(a) luego (a) la AC es mayor que la GC, y quitando
10. P. 5. la BC comun, quedarà la AB mayor que la GB:
(b) luego (b) la AB a la BC tiene mayor proporcion,
8. P. 5. que la GB a la misma BC ; pero como la GB a la BC, assi es (c) dividiendo la DE a la EF: luego la
(c) AB a la BC tiene mayor proporcion, que la DE a
17. P. 5. la EF, que es lo que se avia de demostrar.

SCHO-

SCHOLIO.

Lo mismo se entiende quando la compuesta de la primera, y segunda a la segunda tiene menor proporcion, que la compuesta, &c. que tambien dividiendo la primera a la segunda, tendrà menor proporcion, &c.

THEOREMA 30. PROPOSICION 30.

Si la compuesta de la primera, y de la segunda a la segunda tiene mayor proporcion, que la compuesta de la tercera, y de la quarta a la quarta; convirtiendo la primera con la segunda a la primera, tendrà menor proporcion, que la tercera con la quarta à la tercera.

Tenga la AC a la BC mayor proporcion, que la DF a la EF: digo, que por la razon conversa la AC a la AB tiene menor proporcion, que la DF a la DE. Porque por tener la AC a la BC mayor proporcion, que la DF a la EF, tambien dividiendo (a) la AB a la BC tendrà mayor proporcion, que la DE a la EF: luego invirtiendo la BC a la AB, tiene menor proporcion, que (b) la EF a la DE; y componiendo (c) la AC a la AB, tendrà tambien menor proporcion, que la DF a la DE, que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 18. (a) 29. P. 5. (b) 26. P. 5. (c) 28. P. 5.

SCHOLIO.

Lo mismo se entiende, quando la compuesta de la primera, y segunda a la segunda tiene menor proporcion, &c. convirtiendo la primera con la segunda a la primera, tendrà mayor proporcion, &c.

THEOREMA 31. PROPOSICION 31.

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero, si en las primeras la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que en las segundas la primera a la segunda: y si en las primeras la segunda a la tercera tiene mayor proporcion, que en las segundas la segunda a la tercera: tambien por igualdad tendrà mayor proporcion en las primeras la primera a la tercera, que en las segundas la primera a la tercera.

Sean las primeras magnitudes A, B, C, y las segundas D, E, F, y tenga mayor proporcion la A a la B, que la D a la E, y la B a la C mayor que la E a la F: digo, que por igualdad de razon la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la D a la F.

A.	D.	
B.	E.	G.
C.	F.	H.

Sea la G a la C, como la E a la F, y tendrà la B a la C mayor proporcion, que la G a la C: luego (a) la B es mayor que la G, y tendrà (b) la A a la menor G mayor proporcion, que la misma A a la mayor B; pero la

(a) 10 P. 5.
(b) 8. P. 5.

la A a la B tiene mayor proporcion, que la D a la E: luego la A a la G tiene mucho mayor proporcion, que la D a la E. Sea la H a la G, como la D a la E, y tendrà la A a la G mayor proporcion, que la H a la misma G: luego (c) la A es mayor que la H, y tendrà (d) la mayor A a la C mayor proporcion, que la H a la misma C; pero como la H a la C, (e) assi es por igualdad de razon la D a la F [porque como D a E, assi es H a G; y como E a F, assi G a C por la construccion:] luego la A a la C tiene mayor proporcion, que la D a la F, que es, &c.

(c) 10. p. 5.
(d) 8. p. 5.
(e) 22. p. 5.

SCHOLIO.

De la misma manera se demuestra, que si la A a la B tiene la misma razon, que la D a la E, y la B a la C mayor, que la E a la F: ò si la A a la B tiene mayor proporcion, que la D a la E; y la B a la C la misma que la E a la F; que por igualdad de razon la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la D a la F.

Lo mismo se entiende, quando las razones de las primeras magnitudes son menores, que de las segundas. Porque entonces de las segundas magnitudes se hazen primeras.

THEOREMA 32. PROPOSICION 32,

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero, si en las primeras la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que en las segundas la segunda a la tercera: y si en las primeras

la

la segunda a la tercera tiene mayor proporcion, que en las segundas la primera a la segunda: tambien por igualdad de razon en las primeras la primera a la tercera tendrà mayor proporcion, que en las segundas la primera a la tercera.

Sean las primeras magnitudes A, B, C, y las segundas D, E, F, y tenga la A a la B mayor proporcion, que la E a la F, y la B a la C mayor que la D a la E: digo, que por la igualdad de razon la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la D a la F.

A.	D.	
B.	E.	G.
C.	F.	H.

Sea la G a la C, como la D a la E, y tendrà la B a la C mayor proporcion, que la G a la misma C: luego (a) la B es mayor que la G: luego (b) la A a la menor G tendrà mayor proporcion, que la misma A a la mayor *B*; pero la A a la *B* tiene mayor proporcion, que la E a la F: luego la A a la G tiene mucho mayor proporcion, que la E a la F. Sea la H a la G como la E a la F, y tendrà la A a la G mayor proporcion, que la H a la misma G: luego (a) la A es mayor que la H, y tendrà (b) la mayor A a la C mayor proporcion, que la menor H a la misma C; pero como la H a la C, assi es (c) por igualdad de razon la D a la F [porque D, E, G, C son proporcionales, y tambien E, F, H, G por la construccion:] luego la A a la C tiene tambien mayor proporcion que la D a la F, que es lo que se avia de demostrar.

(a) 10. P. 5.
(b) 8. P. 5.
(c) 23. P. 5.

SCHO-

SCHOLIO.

De la misma manera, si es como A a B, assi E a F; pero la razon de B a C mayor, que la de D a E; ò al contrario, si A a B tiene mayor razon, que E a F, y B a C la misma que D a E; tambien por igualdad de razon la A a la C tendrà mayor proporcion, que la D a la F.

THEOREMA 33. PROPOSICION 33.

Si el todo al todo tiene mayor proporcion, que la parte a la parte; tambien el residuo al residuo tendrâ mayor proporcion, que el todo al todo.

Tenga la magnitud entera AB a la entera CD mayor proporcion, que la parte AE a la parte CF: digo, que la residua EB a la residua FD, tiene mayor proporcion, que la entera AB a la entera CD. Porque si la entera AB a la entera CD tiene mayor proporcion, que la parte AE a la parte CF: luego (a) permutando la AB a la AE tiene tambien mayor proporcion, que la CD a la CF, y convirtiendo (b) la AB a la EB tiene menor proporcion, que la CD a la FD: luego permutando la AB a la CD tiene menor proporcion, que la EB a la FD; esto es la EB a la FD, tiene mayor proporcion, que la AB a la CD, que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 19.

(a) 27. P. 5.

(b) 30. P. 5.

la segunda a la tercera tiene mayor p
gundas la primera a la segunda: tamb
zon en las primeras la primera a la
proporcion, que en las segundas la prim

Sean las primeras magnitudes
gundas D, E, F, y tenga la A a
la B mayor proporcion, que la
E a la F, y la B a la C mayor que
la D a la E: digo, que por la
igualdad de razon la A a la C
tiene tambien mayor proporcion,
Sea la G a la C, como la D a la E,
C mayor proporcion, que la G a l
(a) go (a) la B es mayor que la G: lue
10. P. 5. menor G tendrà mayor proporcio
(b) 8. P. 5. A a la mayor *B*; pero la A a la *B* ti
porcion, que la E a la F: luego la A
cho mayor proporcion, que la E a
la G como la E a la F, y tendrà la A
proporcion, que la H a la misma G
es mayor que la H, y tendrà (b) la
mayor proporcion, que la menor
pero como la H a la C, assi es (c)
(c) 23. P. 5. razon la D a la F [porque D, E,
cionales, y tambien E, F, H, G por
luego la A a la C tiene tambien
que la D a la F, que es lo q
trar.

108.

De la mis...
porcion, ...
tendrà meno...

THE

SCHOLIO.

De la misma manera se … la razon de B a C mayor, que … A a B tiene mayor razon, que … D a E; tambien por igualdad … mayor proporcion, que la D a la F.

THEOREMA 33. …

Si el todo al todo tiene mayor … parte; tambien el residuo … que el todo al todo.

Tenga la magnitud … mayor proporcion, que … digo, que la residua EB … yor proporcion, que la entera … Porque si la entera AB a … proporcion, que la parte … (a) permutando l… yor proporcion … (b) la AB a la … CD a la FD: … menor prop… a la FD, ti… CD …

… C duplicada de la A a la … la F,

… igo, A. D.

… es B. E. G.

… E. C. F. H.

… D a …

… la G a la H, y serà (a) … la H; pero como la A a … a la F: luego (b) es co- … D a la H, y seràn (c) … ego tambien las inter- … s, y serà (d) como la … a la B, assi la D a … que se avia … ostrar.

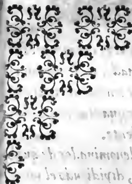
(a) 10. def 5

34. P. 5

(b) 11. P. 5.

(c) 9. P. 5.

(d) 7. P. 5.



COROLARIO.

De aqui se sigue, que dadas quatro cantidades proporcionales, como A, B, C, D. si de la primera A se toma qualquier multiplice, como 2 A, y de la quarta D igual submultiplice, como $\frac{1}{2}$ D, quedarán

$$2\,A.\ A.\ B::\ C.\ D.\ \tfrac{1}{2}D$$
$$\tfrac{1}{2}A.\ A.\ B::\ C.\ D.\ 2\,D.$$

2 A. B::C. $\frac{1}{2}$ D. proporcionales. Porque como 2 A a A (a) assi es D a
(a) 15. P. 5. $\frac{1}{2}$ D, y como A a B, assi se dá C a D: luego (a) es como 2 A a B, assi C a $\frac{1}{2}$ D. Lo mismo será, si de la primera A se tomàre algun submultiplice, y de la quarta D igual multiplice: ò si esto mismo se hiziere con la segunda B, y con la tercera C.

SCHOLIO.

Lo que se dize de tres magnitudes, se demuestra tambien de mas magnitudes que de tres: de suerte, que si se dà, como A a B, assi F a O, y como B a C, assi E a F, y como C a N, assi D a E: digo, que serà, como la A a la N, assi la D a la
(b) 23. P. 5. *O. Porque està demostrado, que serà (b) como la A a la C, assi la E a la O, y se dà, como la C a la N, assi la D a la E: luego (b) como la A a la N, assi serà la D a la O: que es lo que, &c.*

THEO-

THEOREMA 24. PROPOSICION 24.

Si la primera a la segunda tiene la misma razon, que la la tercera a la quarta; y si vna quinta a la segunda tiene la misma razon que vna sexta a la quarta: tambien la compuesta de la primera, y quinta a la segunda, tendrà la misma razon, que la compuesta de la tercera, y sexta a la quarta.

Sea la primera AB a la segunda C, como la tercera DE a la quarta F, y la quinta BG a la segunda C, como la sexta EH a la quarta F: digo, que la AG compuesta de la primera, y quinta a la segunda C, tiene la misma razon, que la DH, compuesta de la tercera, y sexta a la quarta F. Porque por ser la BG a la C, como la EH a la F, serà invirtiendo la C a la BG, como la F a la EH. Y por quanto es como la AB a la C, assi la DE a la F, y como la C a la BG, assi la F a la EH serà (a) como la AB a la BG, assi la DE a la EH: luego (b) componiendo como la AG a la BG, assi la DH a la EH: pero como la BG a la C, assi se dà la EH a la F: luego (a) por igualdad de razon es como la AG a la C, assi la DH a la F; que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 15. (a) 22. p. 5. (b) 18. p. 5.

SCHOLIO.

Si dos magnitudes a otras dos tienen la misma proporcion, y algunas partes della tienen la misma pro-

proporcion a las mismas: los residuos tendràn a las mismas la misma proporcion.

Fig. 15. *Sea como la entera AG a la C, assi la entera DH a la F, y la parte AB a la C, como la parte DE a la F: digo, que el residuo BG a la C es como el residuo EH a la F. Porque por quanto es, como AB a C, assi DE a F, serà invirtiendo*
(c) 22.P.5. *C a AB, como F a DE; pero como AG a C, assi se dâ DH*
(d) 17.P.5. *a F, y como C a AB, assi F a DE: luego (c) por igualdad de razon serà AG a AB, como DH a DE: luego (d) dividiendo como BG a AB, assi EH a DE. Y por quanto es BG a AB, como EH a DE, y AB a C, como DE a F, serà (c) por igualdad de razon BG a C, como EH a F, que es lo que se avia de demostrar.*

THEOREMA 25. PROPOSICION 25.

Dadas quatro magnitudes proporcionales, la maxima con la minima, son mayores que las otras dos.

Fig. 16. Sea como la AB a la CD, assi la E a la F, y sea la AB la maxima, y la F la minima: digo, que la AB, y F juntas son mayores que las CD, y E juntas. De la magnitud AB quitese la AG igual a la E, y de la CD la CH igual a la F, y serà la AG a la CH, como la E a la F, ò como la AB a la CD. Y por quanto es como la enlera AB a la entera CD, assi la parte
(a) 19.P.5. AG, a la parte CH, serà (a) tambien como la entera AB a la entera CD, assi el residuo GB al residuo HD; pero la AB (que es la maxima;) es mayor que la

la CD: luego la GB tambien es mayor, que la HD. Y por quanto las AG, y E son iguales, si se les añaden las F, y CH, tambien iguales, a cada vna la suya, quedaràn las AG, y F juntas, iguales a las E, y CH juntas, luego si a entrambas se añaden las desiguales GB, HD, la mayor GB a las AG, y F, y la menor HD a las E, y CH, quedaràn las AB, y F mayores que las E, y CD: luego dadas quatro magnitudes, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Las Proposiciones siguientes no son de los Elementos de Euclides; pero porque se sirven dellas los mayores Geometras, como Arquimedes, Apollonio, &c. y se citan como si fueran de los Elementos, estàn añadidas a este libro por Campano, y otros Comentadores.

THEOREMA 26. PROPOSICION 26.

Si la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que la tercera a la quarta, invirtiendo la segunda a la primera, tendrà menor proporcion, que la quarta a la tercera.

Tenga la A a la B mayor proporcion, que la C à la D: digo, que invirtiendo la *B* a la A tiene menor proporcion, que la D a la C. Sea la E a la *B*, como la C a la D, y tendrà la A a la *B* mayor proporcion,

A.	C.
B.	D.
E.	

que

(a) 10. P. 5. (b) 8. P. 5.

que la E a la mifma B: luego (a) la A es mayor que la E: luego (b) la B a la A tiene menor proporcion que la B a la E, efto es invirtiendo, que la D a la C, que es lo que fe avia de demoftrar.

SCHOLIO.

Si la primera a la fegunda tiene menor proporcion que la tercera a la quarta, invirtiendo la fegunda a la primera, tendrà mayor proporcion que la quarta a la tercera: La demonftracion es cafi la mifma.

THEOREMA 27. PROPOSICION 27.

Si la primera a la fegunda tiene mayor proporcion, que la tercera a la quarta; tambien alternando la primera a la tercera tendrà mayor proporcion que la fegunda a la quarta.

Tenga la A a la B mayor proporcion, que la C a la D: digo, que alternando la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la *B* a la D. Sea la E a la B, como la C a la D, y tendrà la A a la B mayor proporcion que la E a la mifina B: luego la A (a) es mayor que la E: luego (b) la A a la C tiene mayor proporcion, que la E a la mifina C; pero como la E a la C, afsi es alternando la B a la D [porque E, *B*, C, D fon proporcionales:] luego la A a la C tiene mayor proporcion, que la *B* a la D, que

A.	C.
B.	D.
E.	

que es lo que se avia de demostrar.

SCHOLIO.

De la misma suerte se demuestra, que si la primera a la segunda tiene menor proporcion, que la tercera a la quarta; tambien alternãdo la primera a la tercera tendrà menor proporcion, que la segunda a la quarta.

THEOREMA 28. *PROPOSICION* 28.

Si la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que la tercera a la quarta: tambien componiendo la primera con la segunda a la segunda, tendrà mayor proporcion, que la tercera con la quarta a la quarta.

Tenga la AB a la BC mayor proporcion, que la DE a la EF: digo, que componiendo la AC a la BC, tiene tambien mayor proporcion, que la DF a la EF. Sea la GB a la BC, como la DE a la EF, y tendrà la AB a la BC mayor proporcion, que la GB a la BC: luego la AB (a) es mayor que la GB; añadase a entrambas la BC comun, y serà la AC mayor que la GC: luego (b) la AC a la BC tiene mayor proporcion, que la GC a la misma BC; pero como la GC a la BC, assi es (c) componiendo la DF a la EF: luego la AC a la BC tiene mayor proporcion, que la DF a la EF, que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 17.

(a) 10. p. 5.
(b) 8. p. 5.
(c) 18. p. 5.

SCHOLIO.

De la misma manera: si la primera a la segunda tiene menor proporcion, que la tercera a la quarta; tambien componiendo la primera con la segunda a la segunda, tendrà menor proporcion, que la tercera con la quarta a la quarta.

THEOREMA 29. PROPOSICION 29.

Si la compuesta de la primera, y de la segunda, a la segunda tiene mayor proporcion, que la compuesta de la tercera, y de la quarta a la quarta: tambien dividiendo la primera a la segunda, tendrà mayor proporcion, que la tercera a la quarta.

Tenga la AC a la BC mayor proporcion, que la
Fig. 17. DF a la EF: digo, que dividiendo la AB a la BC, tiene tambien mayor proporcion, que la DE a la EF. Sea la GC a la BC, como la DF a la EF, y tendrà la AC a la BC mayor proporcion, que la GC a la BC:
(a) 10. P. 5. luego (a) la AC es mayor que la GC, y quitando la BC comun, quedarà la AB mayor que la GB:
(b) 8. P. 5. luego (b) la AB a la BC tiene mayor proporcion, que la GB a la misma BC; pero como la GB a la BC, assi es (c) dividiendo la DE a la EF: luego la
(c) 17. P. 5. AB a la BC tiene mayor proporcion, que la DE a la EF, que es lo que se avia de demostrar.

SCHO-

SCHOLIO.

Lo mismo se entiende quando la compuesta de la primera, y segunda a la segunda tiene menor proporcion, que la compuesta, &c. que tambien dividiendo la primera a la segunda, tendrà menor proporcion, &c.

THEOREMA 30. PROPOSICION 30.

Si la compuesta de la primera, y de la segunda a la segunda tiene mayor proporcion, que la compuesta de la tercera, y de la quarta a la quarta; convirtiendo la primera con la segunda a la primera, tendrà menor proporcion, que la tercera con la quarta a la tercera.

Tenga la AC a la BC mayor proporcion, que la DF a la EF: digo, que por la razon conversa la AC a la AB tiene menor proporcion, que la DF a la DE. Porque por tener la AC a la BC mayor proporcion, que la DF a la EF, tambien dividiendo (a) la AB a la BC tendrà mayor proporcion, que la DE a la EF: luego invirtiendo la BC a la AB, tiene menor proporcion, que (b) la EF a la DE; y componiendo (c) la AC a la AB, tendrà tambien menor proporcion, que la DF a la DE, que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 18.
(a) 29. P. 5.
(b) 26. P. 5.
(c) 28. P. 5.

SCHOLIO.

Lo mismo se entiende, quando la compuesta de la primera, y segunda a la segunda tiene menor proporcion, &c. convirtiendo la primera con la segunda a la primera, tendrà mayor proporcion, &c.

THEOREMA 31. PROPOSICION 31.

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero, si en las primeras la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que en las segundas la primera a la segunda: y si en las primeras la segunda a la tercera tiene mayor proporcion, que en las segundas la segunda a la tercera: tambien por igualdad tendrà mayor proporcion en las primeras la primera a la tercera, que en las segundas la primera a la tercera.

Sean las primeras magnitudes A, B, C, y las segundas D, E, F, y tenga mayor proporcion la A a la B, que la D a la E, y la B a la C mayor que la E a la F: digo, que por igualdad de razon la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la D a la F.

A.	D.	
B.	E.	G.
C.	F.	H.

Sea la G a la C, como la E a la F, y tendrà la B a la C mayor proporcion, que la G a la C: luego (a) la B es mayor que la G, y tendrà (b) la A a la menor G mayor proporcion, que la misma A a la mayor B; pero la

(a) 10 P. 5. (b) 8. P. 5.

la A à la B tiene mayor proporcion, que la D a la E: luego la A a la G tiene mucho mayor proporcion, que la D a la E. Sea la H a la G, como la D a la E, y tendra la A a la G mayor proporcion, que la H a la misma G: luego (c) la A es mayor que la H, y tendrà (d) la mayor A a la C mayor proporcion, que la H a la misma C; pero como la H a la C, (e) assi es por igualdad de razon la D a la F [porque como D a E, assi es H a G; y como E a F, assi G a C por la construccion:] luego la A a la C tiene mayor proporcion, que la D a la F, que es, &c. (c) 10. p. 5. (d) 8. p. 5. (e) 22. p. 5.

SCHOLIO.

De la misma manera se demuestra, que si la A a la B tiene la misma razon, que la D a la E, y la B a la C mayor, que la E a la F: ò si la A a la B tiene mayor proporcion, que la D a la E; y la B a la C la misma que la E a la F; que por igualdad de razon la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la D a la F.

Lo mismo se entiende, quando las razones de las primeras magnitudes son menores, que de las segundas. Porque entonces de las segundas magnitudes se hazen primeras.

THEOREMA 32. PROPOSICION 32,

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero, si en las primeras la primera a la segunda tiene mayor proporcion, que en las segundas la segunda a la tercera: y si en las primeras la

la segunda a la tercera tiene mayor proporcion, que en las segundas la primera a la segunda: tambien por igualdad de razon en las primeras la primera a la tercera tendrà mayor proporcion, que en las segundas la primera a la tercera.

Sean las primeras magnitudes A, B, C, y las segundas D, E, F, y tenga la A a la B mayor proporcion, que la E a la F, y la B a la C mayor que la D a la E: digo, que por la igualdad de razon la A a la C tiene tambien mayor proporcion, que la D a la F.

A.	D.	
B.	E.	G.
C.	F.	H.

Sea la G a la C, como la D a la E, y tendrà la B a la C mayor proporcion, que la G a la misma C: lue-
(a) go (a) la B es mayor que la G: luego (b) la A a la
10. P. 5. menor G tendrà mayor proporcion, que la misma
(b) 8. P. 5. A a la mayor B; pero la A a la B tiene mayor proporcion, que la E a la F: luego la A a la G tiene mucho mayor proporcion, que la E a la F. Sea la H a la G como la E a la F, y tendrà la A a la G mayor proporcion, que la H a la misma G: luego (a) la A es mayor que la H, y tendrà (b) la mayor A a la C mayor proporcion, que la menor H a la misma C; pero como la H a la C, assi es (c) por igualdad de
(c) razon la D a la F [porque D, E, G, C son propor-
23. P. 5. cionales, y tambien E, F, H, G por la construccion:] luego la A a la C tiene tambien mayor proporcion que la D a la F, que es lo que se avia de demostrar.

SCHO-

SCHOLIO.

De la misma manera, si es como A a B, assi E a F; pero la razon de B a C mayor, que la de D a E; ò al contrario, si A a B tiene mayor razon, que E a F, y B a C la misma que D a E; tambien por igualdad de razon la A a la C tendrà mayor proporcion, que la D a la F.

THEOREMA 33. PROPOSICION 33.

Si el todo al todo tiene mayor proporcion, que la parte a la parte; tambien el residuo al residuo tendrâ mayor proporcion, que el todo al todo.

Tenga la magnitud entera AB a la entera CD mayor proporcion, que la parte AE a la parte CF: digo, que la residua EB a la residua FD, tiene mayor proporcion, que la entera AB a la entera CD. Porque si la entera AB a la entera CD tiene mayor proporcion, que la parte AE a la parte CF: luego (a) permutando la AB a la AE tiene tambien mayor proporcion, que la CD a la CF, y convirtiendo (b) la AB a la EB tiene menor proporcion, que la CD a la FD: luego permutando la AB a la CD tiene menor proporcion, que la EB a la FD; esto es la EB a la FD, tiene mayor proporcion, que la AB a la CD, que es lo que se avia de demostrar. Fig. 19. (a) 27.P.5. (b) 30.P.5.

SCHOLIO.

De la misma manera, si el todo al todo tiene menor proporcion, que la parte a la parte; tambien el residuo al residuo tendrà menor proporcion, que el todo al todo.

THEOREMA 34. PROPOSICION 34.

Las razones, que son duplicadas, ò triplicadas de iguales razones, y assi en adelante, son iguales entre si.

Sean las razones A a la C, y D a la F duplicadas de iguales razones, la A a la C duplicada de la A a la B, y la D a la F, duplicada de la D a la E: digo, que la razon de la A a la C es igual a la razon de la D a la F. Porque por ser la razon de la A a la C duplicada de la razon de la A a la B,

A.	D.
B.	E.
C.	F.

(a) 10.def 5 serà (a) como la a la B, assi la B a la C: por la misma razon serà como la D a la E, assi la E a la F: y porque se dà, que es como A a la B, assi la D a la E serà tambien como la B a la C, assi la E a la F: luego (b) por la igualdad de razon es como la A a
(b) 22.P.5. la C, assi la D a la F, que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 35. PROPOSICION 35.

Las razones iguales, que son duplicadas, ò triplicadas de otras, y assi en adelante, tambien estas son iguales entre si.

Sea

Sea la razon de la A a la C duplicada de la A a la B, igual a la razon de la D a la F, duplicada de la D a la E: digo, que la razon de la A a la B es igual a la razon de la D a la E.

A.	D.	
B.	E.	G.
C.	F.	H.

Sea como la A a la B, assi la D a la G; y como la B a la C, asi la G a la H, y serà (a) como la A a la C, asi la D a la H; pero como la A a la C, asi se supone ser la D a la F: luego (b) es como la D a la F, asi la misma D a la H, y seràn (c) las F, H iguales entre si: luego tambien las intermedias E, y G son iguales, y serà (d) como la D a la G, ò como la A a la B, asi la D a la E; que es lo que se avia de demostrar.

(a) 10. def. 5 y 34. P. 5
(b) 11. P. 5.
(c) 9. P. 5.
(d) 7. P. 5.



APENDIZ

DE LA PROPORCIONALIDAD, Y DEnominadores de las proporciones.

Num. I. Denominador de la proporcion racional.



Enominador de la proporcion racional es, el que distinta, y claramente exprime el respeto de vn numero a otro, ò el que a la vnidad tiene la misma razon, que vno tiene a otro; y assi el denominador explica quantas vezes el numero mayor contiene al menor, y quantas vezes el menor està contenido en el mayor; como el denominador de la proporcion que 27 tiene a 9 es 3, porque el 3 a la vnidad tiene la misma razon que 27 a 9, y assi 3 exprime quantas vezes el consequente està contenido en el antecedente.

El denominador de qualquiera razon entre dos numeros se halla, dividiendo el vno por el otro; el cociente es el denominador de la proporcion, porque el cociente a la vnidad es, como el numero dividido al divisor.

N. II.

N. II. Denominadores de las proporciones irracionales.

Quando estas tienen vn comun consequente, los antecedentes dèl son los denominadores de las proporciones, y el comun consequente suple las vezes de la vnidad. De vna sola proporcion irracional no se puede dar denominador; pero si huviere dos, ò mas proporciones irracionales, se podràn hallar sus denominadores, que expliquen en alguna manera el modo, como vna proporcion irracional sea respecto de otra; v. g. Sean las proporciones irracionales las què la magnitud A tiene a la B, y la C a la D, y reduzganse a vn comun consequente, que sea, como A a B, assi F a H, y como C a D, assi G a H; el comun consequente H suple las vezes de la vnidad, y los antecedentes F, y G son los denominadores de las proporciones de F a H, y de G a H (esto es, de las razones de A a B, y de C a D,) porque exprimen como vna proporcion sea respeto de otra; siendo como F a G, assi la proporcion de A a B a la proporcion de C a D. Fig. 20.

N. III. Axiomas.

1. *Las proporciones (de F a H, y de G a H) que tienen vn comun consequente (H) tienen entre si la misma proporcion, que los antecedentes (* 2. P. Greg. S. Vinc. lib 8. quad. *) esto es, la razon de G à H es tanto mayor, ò menor, que la de F a H, quanto G es mayor, ò menor que F.* Fig. 20.

2. *Las proporciones (de I a L, y de I a M) que tienen vn comun antecedente, tienen entre si reciproca la proporcion* Fig. 21.

de los consequentes (7. p.lib.8. quadr.) esto es la razon de I a L a la razon de I a M es reciprocamente como el consequente M al consequente L; conviene a saber, la razon de I a L es tanto mayor, ò menor, que la de I a M, quanto L es menor, ò mayor que M.

3 *Las proporciones racionales tienen entre si la misma razon, que los denominadores. (Siguese del axiom. 1.)*

Sea la proporcion 12 a 3, y la 15 a 6, cuyos denominadores son 4, y $2\frac{1}{2}$ la proporcion (a) *de 12 a 3 es la misma que de 4 a 1, y la razon de 15 a 6 es la misma que de $2\frac{1}{2}$ a 1. pero la razon 4. a 1. a la razon $2\frac{1}{2}$ a 1. es* (b) *como 4 a $2\frac{1}{2}$: luego la razon 12 a 3 a la razon 15 a 6, es como el denominador 4 al denominador $2\frac{1}{2}$.*

(a) num. 1.
(b) 1. ax. 1.

N. IV. Addicion, y subtraccion de las razones racionales.

La addicion *se haze sumando los denominadores de las razones; porque la razon que la suma de los denominadores tiene a la vnidad, es la suma de las razones dadas.*

Sea la razon de 12 a 3, y la de 15 a 6: sus denominadores 4, y $2\frac{1}{2}$ sumados componen $6\frac{1}{2}$ la razon de $6\frac{1}{2}$ a 1 es igual a la razon de 12 a 3, y de 15 a 6 juntas. (Siguese de los axiom. 1 y 3.)

La subtraccion *se haze restando el menor denominador*

dor del mayor; porque el residuo a la vnidad es la razon que queda, quando la menor razon se resta de la mayor. (*Siguese de los axiom* 1. y 3.)

Dense las razones de 12 *a* 3, *y* 15 *a* 6, *sus denominadores son* 4, *y* $2\frac{1}{2}$ *restese el menor* $2\frac{1}{2}$ *del mayor* 4, *el residuo será* $\frac{3}{2}$: *la razon de* $\frac{3}{2}$ *a* 1. *es la que queda, quando la razon* 15. *a* 6. *ó* $2\frac{1}{2}$ *a* 1 *se resta de la razon* 12 *a* 3, *ó* 4 *a* 1.

N. V. Addiccion, y subtraccion de las razones irracionales.

Las razones dadas de A a B, y de C a D reduzganse a las razones de F a H, y de G a H, que tienen el comun consequente H. Los antecedentes F, y G sumados componen F + *G; y la razon de F* + *G a H, es la suma de las razones de F a H, y de G a H; esto es de A a B* + *de C a D.* (*Siguese del ax.* 1.) *Fig.* 20.

La subtracciõ *se haze, si reducidas las razones á vn comun consequente, el antecedente menor como G se resta del mayor F. Porque la razon que el residuo tuviere a la H, es la que queda, quando la razon de G a H, ó de C a D se resta de la razon de F a H, ó de A a B.* (*Siguese del axiom.* 1.)

N. VI. Multiplicacion, y division de las razones racionales.

Si los denominadores de las razones se multiplican entre si,

si, el producto es el denominador de la razon, que sale por la multiplicacion de las razones dadas; esto es la razon, que a la vnidad tiene el producto por la dicha multiplicacion, es la que sale por la multiplicació de las razones mismas. (siguese de los axiom. 1. y 3.) Porque la multiplicacion de las razones es repetida addicion de la vna a la otra; pero esto se haze por la repetida addicion (esto es por multiplicacion) de los denominadores, como consta de los axiomas 1. y 3.

Dense las razones de 9 a 3, y de 20 a 4; los denominadores 3, y 5 multiplicados producen 15: la razon de 15 a 1 es la que sale por la multiplicacion de las razones de 9 a 3 (ò de 3 a 1) y de 20 a 4 (ò de 5 a 1.)

La division *de las razones se haze quando el denominador de la mayor razon se parte por el de la menor. Porque la razon que el cociente tiene à la vnidad, es la que sale por la division, quando la razon mayor se parte por la menor; la razon es, por quanto la division de vna razon por otra, es repetida subtraccion de la vna de la otra.*

N. VII. Multiplicacion de las razones irracionales.

Dense las razones de A a B, y de C a D, que se ayan de multiplicar entre si: hagase como A a B, assi D a E; la razon de C a E es la que sale por la multiplicacion de las razones dadas de A a B, y de C a D. [Greg. à S. Vinc. lib. 8. quad. Prop. 75. y la demonstracion es del P. Tacquet.] Porque la razon de C a E sale por la multiplicacion de las razones de C a D, y de D

Fig. 22.

a E, como se verà en la demostracion del num. 11 independiente deste; pero las razones de C a D, y de D a E son las mismas, que de C a D, y de A a B por la construccion: luego la razon de C a E es la que sale por la multiplicacion de las razones de A a B, y de C a D.

N. VIII. Division de las razones irracionales.

La razon de C a E se aya de diuidir por la razon de A a B: hagase como A a B, assi C a D: digo, que la razon de D a E es el cociente desta division. Porque la razon de C a D (esto es por la construccion la razon de A a B) multiplicada por la razon de D a E produce la razon de C a E, como se verà en el num. 11 independiente deste: luego la razon de D a E es el cociente. Porque el cociente multiplicada con el divisor (que es la razon de A a B) restituye la razon de C a E, que se ha de diuidir. Fig. 22.

N. IX. Composicion de las razones.

Vna razon se dize componerse de algunas razones, quando los denominadores dellas multiplicados entre si producen alguna razon, 5. def. 6. Euclides.

Dense qualesquiera razones, cuyos denominadores sean 2, 3, $1\frac{1}{4}$ multipliquense sucessivamente el 2 por el 3; y el producto 6 por el $1\frac{1}{4}$. sale $7\frac{1}{2}$: el primer producto 6 es el denominador de la razon compuesta de dos razones, cu-

cuyos denominadores son 2. *y* 3. *esto es, la razon de* 6. *a* 1. *se compone v.g. de las razones de* 6. *a* 3. *y de* 12. *a* 4. *y el producto* $7\frac{1}{2}$ *es el denominador de la razon compuesta de tres razones, cuyos denominadores dados son* 2. 3. $1\frac{1}{4}$

N. X. Composicion de razones *no es otra cosa, que la multiplicacion dellas; y assi qualquiera razon se compone de las mismas razones, que multiplicadas la producen.*

Porque la razon que sale por la multiplicacion de algunas razones, es la que la cantidad producida por la multiplicacion de los denominadores tiene a la vnidad como a consequente comun, como consta por los axiomas del num. 4. *y por el num.* 7. *pero tambien por la* 5. *def.* 6. *la razon que se compone de algunas razones, es la que la cantidad producida por la multiplicacion de los denominadores tiene à la vnidad, como a consequente comun: luego la razon se compone de las mismas razones, de cuyas multiplicaciones se produce.*

NOTA.

Para la claridad de los numeros siguientes se ha de observar, que la multiplicacion, y division de las magnitudes de vnas con otras, se entiende a la semejança de los numeros; y como en los numeros vno se multiplica por otro quando se haze; como la vnidad al vno de los que se multiplican, assi el otro a otro quarto, que es el producto por la multiplicacion: de la misma manera vna magnitud se dirà multiplicarse por otra, quando se hiziere: como vna recta tomada en lugar de

la

la vnidad a vna magnitud de las que se han de multiplicar, assi la otra dellas a otra quarta, que se llamarà el Producto.

Y como en los numeros vno se dize dividirse por otro, quando se haze, como el vno al otro, assi la vnidad a otro quarto, que se llama cociente, assi en las magnitudes la vna se dirà dividirse por la otra, quando tomando vna cantidad en lugar de la vnidad se hiziere, como la vna magnitud a la otra, assi la tomada en lugar de la vnidad a otra quarta, que se llamarà Cociente.

N. XI. De qualesquiera magnitudes, y en qualquier numero la razon que la primera tiene a la vltima, se compone de las razones intermedias.

Demuestrase en las magnitudes.

Dense las magnitudes A, B, C, D: digo, que la razon de la A a la D se compone de las razones de A a B, y de B a C, y de C a D: hagase como B a C, assi X a B, y quedaràn las razones de A a B, y de B a C reducidas a las razones de A a B, y de X a B, que tienen el consequente B comun: luego (a) *los denominadores de las razones son A, y X, y el consequente B comun suple las vezes de la vnidad, que es el comun consequente de todos los denominadores numericos. Y si las magnitudes A, X se han de multiplicar entre si, se ha de hazer* (b) *como la vnidad B a X, assi A a otra quarta Z; que serà el producto de la* mul-

Z
A X
B
C
D

(a) num. 3.

(b) Not. Scho lio ant.

multiplicacion de A por X. Y por quanto la cantidad Z es el producto de la multiplicacion de A por X, serà la razon deste producto Z à la B, como unidad, y consequente comun
(c) *num. 9.* *la que sale (c) por la multiplicacion de las razones A à B, y X a B, en la misma conformidad, como està demostrado de la multiplicacion de razones numericas en el num. 7. pero la razon de X a B es la misma, que la de B a C por la construccion: luego la razon de Z a B sale tambien por la multiplicacion de las razones de A a* B, *y de* B a C. *Y por quanto por la construccion es, como* B *a X, assi A a Z serà invirtiendo como Z a A, assi X a* B, *esto es, assi* B a C *por la construccion: luego alternando es, como Z a* B, *assi A a* C; *pero està demostrado, que la razon de Z a* B *sale por la multiplicacion de las razones de A a* B, *y de* B a C: *luego la razon de A a* C *sale tambien por la misma multiplicacion de las razones*
(d) *num. 10.* *de A a* B, *y de* B a C; *pero (d) està demostrado, que la razon se compone de las razones, de cuyas multiplicaciones se produce: luego la razon de A a* C *se compone de las razones de A a* B, *y de* B *à* C. *De la misma manera se demostrarà, que la razon de A a D se compone de las razones de A a* C, *y de* C *a D: luego la razon de A a D se compone de las razones de* A *a* B, *y de* B a C, *y de* C *a D; y si huviere mas cantidades, &c. que es lo que se avia de demostrar.*

Demuestrase en los numeros.

La misma demonstracion sirve para los numeros. Densе los numeros 8, 4, 3, *y hagase como* 4 *a* 8, *assi* 1 *a* 2, *y como*

como 4 *a* 3, *asi* 1 *a* $\frac{3}{4}$, *seràn las razones* 8 *a* 4, *y* 2 *a* 1: *item las* 4 *a* 3, *y* 1 *a* $\frac{3}{4}$ *iguales entre si, y serà* (a) *por la* (a) 22. P. 5. *igualdad, como* 8 *a* 3, *asi* 2 *a* $\frac{3}{4}$. *Hagase ademàs, como* $\frac{3}{4}$ *a* 1, *asi* 1 *a* $\frac{4}{3}$, *y quedaràn las razones* 2 *a* 1, *y* 1 *a* $\frac{3}{4}$ *(esto es* 8 *a* 4, *y* 4 *a* 3 *) reducidas a las dos razones* 2 *a* 1, *y* $\frac{4}{3}$ *a* 1, *que tienen por comun consequente la vnidad: luego* 2, *y* $\frac{4}{3}$ *son* (b) *los denominadores de las razones* 8 *a* 4, *y* 4 *a* 3. *Multipliquense* (b) num. 11. *entre si los denominadores* 2, *y* $\frac{4}{3}$, *esto es, hagase como* 1 *a* $\frac{4}{3}$ *asi* 2 *a* $\frac{8}{3}$, *serà* $\frac{8}{3}$ *el producto por la multiplicacion de los denominadores de las razones* 8 *a* 4, *y* 4 *a* 3: *luego la razon* (c) *deste producto* $\frac{8}{3}$ *a* 1 *es la que sale* (c) num. 7. *por la multiplicacion de las razones* 8 *a* 4, *y* 4 *a* 3. *Y por quanto por la construccion es como* 1 *a* $\frac{4}{3}$, *asi* 2 *a* $\frac{8}{3}$, *serà invirtiendo como* $\frac{8}{3}$ *a* 2, *asi* $\frac{4}{3}$ *a* 1; *pero tambien por la construccion es como* $\frac{4}{3}$ *a* 1, *asi* 1 *a* $\frac{3}{4}$: *luego* (d) $\frac{8}{3}$ *a* 2 *es, como* (d) 11. P. 5. 1 *a* $\frac{3}{4}$: *luego alternando* $\frac{8}{3}$ *a* 1, *es como* 2 *a* $\frac{3}{4}$: *tambien la razon* $\frac{8}{3}$ *a* 1 *es la que sale por la multiplicacion de las razones* 8 *a* 4, *y* 4 *a* 3, *como està demostrado: luego la razon* 2 *a* $\frac{3}{4}$ *sale por la multiplicacion de las mismas razones* 8 *a* 4

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

y 4 a 4; pero como 2 a $\frac{3}{4}$ *assi está demostrado* 8 *a* 3: *luego la razon de* 8 *a* 3 *se produce por la multiplicacion de las ra-*
(e) *zones* 8 *a* 4, *y* 4 *a* 3: *luego* (e) *se compone dellas. Lo mis-*
num. 10. *mo se demostrará, quando ay mas que tres numeros.*

N. XII. Dadas qualesquiera razones A a B, y C a D, y E a F, &c. se podrá dar la razon compuesta de todas ellas.

Hagase como A a B, assi la G a H, y como C a D, assi H a I, y como E a F, assi I a K, y será
(f) *num.* 11. (f) *la razon de G a K compuesta de las razones de G a H, y de H a I, y de I a K, esto es de las razones dadas de A a B, y de C a D, y de E a F, que es lo que se avia de hazer.*

A. B. G.
C. D. H.
E. F. I.
K.

N. XIII. La razon compuesta no es igual a las razones de quienes se compone.

Entre las dos cantidades G, y K ponganse otras intermedias, ya sean continuas proporcionales, ó no lo sean: digo, que la razon de la primera G a la vltima K no es igual a las razones intermedias juntas de G a H, y de H a I, y de I a K, de quienes se com-
(h) *pone. Porque componerse dellas es producirse* (h)
num. 9. *por la multiplicacion dellas, de vnas con otras: lue-*

G.
H.
I.
K.

go por quanto la razon de G a K està producida de las razones de G a H, H a I, I a K multiplicadas entre si, no pueden las razones G a H, H a I, I a K juntas ser iguales a la razon de G a K, sino es quando por accidente la addicion, y multiplicacion produxeren vna misma razon; y para tener vna razon igual a las dadas, es menester sumarlas, como està dicho en los num. 5. y 6. y las mas vezes, ò casi siempre serà diversa de la razon, que se compone dellas.

FIN DEL LIBRO QVINTO.



LIBRO SEXTO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES.

DEFINICIONES.

1. Semejantes figuras rectilineas son las que tienen angulos correspondientes iguales, y proporcionales los lados que comprehenden iguales angulos.

Fig. 25. *Como los triangulos ABC, DEF se llamaran semejantes, si el angulo A es igual al angulo D, y el angulo B al angulo E, y el C al F, y si ademàs los lados AB, AC son proporcionales a los lados DE, DF, esto es, si como AB a BC, assi es DE a DF, y como AB a BC, assi DE a EF, y como BC a CA, assi EF a FD. Lo que se dize de los triangulos, tambien se ha de entender de qualesquiera figuras rectilineas.*

2. Figuras reciprocas son, quando en entrambas se hallan los antecedentes, y consequentes por terminos de las proporciones.

Esto

Esto es, quando en vna figura se toma el antecedente, y en la otra su consequente, y en la figura en que se tomò el consequente se toma otro lado por antecedente, y en la primera su consequente, cerca de los mismos angulos: como en los paralelogrammos AC, y EG, si el lado AB tiene la misma proporcion al lado EF, que el lado FG al lado BC, ò si se dà, que como AB a FG, assi es EF a BC: estos dos paralelogrammos se llamaràn reciprocos. Lo mismo se entiende de otras figuras rectilineas; aunque fuera de triangulos, y paralelogrammos no se habla de figuras reciprocas. Fig. 18.

3 Vna linea recta està dividida segun la extrema, y media razon, quando toda la linea al mayor segmento, tiene la misma proporcion, que este al menor.

Como si la entera AB es al mayor segmento AC, como este mismo a la CB estarà la linea AB dividida segun la extrema, y media razon: lo mismo es de vn paralelogrammo, ò triangulo. Fig. 2.

4 La altura de qualquier figura, es la perpendicular, tirada desde el vertice a la base.

Como la perpendicular AD se llama altura del triangulo ABC, y esto se entiende, aunque la perpendicular cayga fuera de la figura prolongando su base. Y assi si dos figuras tienen iguales perpendiculares, tendràn la misma altura, como si las perpendiculares AD, EH son iguales, los triangulos BAC, FEG tendràn la misma altura, y la linea AE serà (a) paralela a las bases BC, FG, si estas se componen en vna linea recta; y al contrario, si de dos figuras, como de los trian- Fig. 1.

(a) 33. P. 1.

triangulos ABC, GEF los vertices estàn en vna paralela, y las bases en otra, estos tendràn la misma altura. Porque si
(b) 34. P. 1. *las lineas AE, y BG son paralelas, las perpendiculares (b)*
(c) 17. P. 1. *AD, EH son paralelas, è iguales. La perpendicular se toma por medida de qualquier distancia, como entre el vertice*
(d) 19. P. 1. *A, y la base BC, porque es vnica (c) y (d) la mas breve.*

5. Razon compuesta de otras razones es, la que producen las cantidades de algunas razones multiplicadas entre si.

Como si se dàn las cantidades de vna especie A 27, B 9, C 36, D 12, E 3, la primera cantidad A a la vltima cantidad E tiene la razon compuesta de las razones intermedias de A a B, de B a C, de C a D, y de D a E, y esta razon compuesta se produce multiplicando continuamente los exponentes, ò denominadores de las intermedias, como en el exemplo A 27 es triplo de B 9, su exponente es 3, B 9 a C 36, es subquadruplo, su exponente es $\frac{1}{4}$ C 36 a D 12 es triplo, su exponente es 3, D 12 a E 3, es quadruplo, su exponente es 4; multiplicando pues continuamente estos exponentes, que son 3 $\frac{1}{4}$, 3, 4, el producto, que es $\frac{36}{4}$ esto es 9 explica la razon compuesta, que A primera tiene a la E vltima, y significa el valor desta razon compuesta, y es, que el A contiene al E nueue vezes.

Pero quando se dàn las cantidades, como A, B, C, D, E, que se comparan consecutivamente vna à otra, y no se sabe la cantidad del exponente de las proporciones intermedias, sabemos por lo menos, que la proporcion de A a E es compuesta

de

de las proporciones intermedias, pero no sabrèmos su valor para poder exprimirla en numeros. La cantidad de la proporcion es lo mismo que el denominador de la proporcion: vease la def. 10. del 5.

6 Vn paralelogrammo, *como ACDE* aplicado a vna linea recta, *como AB*, se llama *Deficiente* con vn paralelogrammo, *como CBFD*, quando no ocupa toda la linea *AB* dada. Y dizese, que excede, *como el el paralelogrammo ABFE*, quando ocupa vna linea mayor que la linea (*como AC*) dada. Fig. 2.

Pero es menester que el paralelogrammo Deficiente, ò Excedente *tenga la misma altura con el paralelogrammo aplicado, y que juntos compongan vn paralelogrammo* (ABFE) *entero. El paralelogrammo CBDF se llama* defecto *en el primer caso,* excesso *en el caso segundo.*

THEOREMA I. PROPOSICION I.

Los triangulos, y paralelogramos que tienen igual altura, tienen la misma proporcion que las bases.

Los triangulos ABC, DEF tengan igual altura, ò estèn (a) entre vnas mismas paralelas GH, LN, y tambien los paralelogrammos CG, EH: digo, que el triangulo ABC al triangulo DEF, y el paralelogrammo CG al EH tiene la misma proporcion que la base BC à la base EF; esto es, que como la base BC a la base EF, assi es el triangulo ABC al DEF. Tomese dè la primera magnitud BC vn multiplice Fig. 3. (a) 4. def. 6.

 como

como CL, conviene a saber, tomando a la linea BC iguales BI, IK, KL, y tirense las rectas AI, AK, AL, seràn los triangulos (b) BAC, BAI, IAK, KAL iguales entre si: luego quantas vezes la base CL contiene a la base CB, las mismas vezes el triangulo CAL contiene al triangulo ABC: luego la base CL, y el triangulo ACL son igualmente multiplices de la primera BC, y de la tercera BAC. Tomese tambien de la base EF vn multiplice como EN, tomando iguales a la EF las FM, MN, y tirense las rectas DM, DN, seràn (b) los triangulos EDF, FDM, MDN iguales entre si: luego quantas vezes la base EN contiene a la base EF, otras tantas el triangulo EDN contiene al triangulo EDF, y seràn la base EN, y el triangulo EDN igualmente multiplices de la segunda EF, y de la quarta EDF. Pero quando la CL multiplice de la primera BC, es mayor que la EN multiplice de la segunda EF, tambien la CAL, multiplice de la tercera BAC (b) es mayor q̃ la EDN, multiplice de la quarta EDF; y si la CL es igual a la EN, tambiẽ la CAL es igual a la EDN; y si menor, menor: luego es (c) como la primera *BC* a la segunda EF, assi la tercera BAC a la quarta DEF: luego los triangulos entre vnas mismas paralelas tienen la misma proporcion que las bases. Pero el triangulo ABC es la mitad (d) del paralelogrammo CG, y el triangulo EDF la mitad del paralelogrammo EH, y las mitades (e) tienen la misma proporcion que sus igualmente multiplices:

(b) 38. P. 1.

(c) 6. dif. 5.

(d) 34. P. 1.

(e) 15. P. 5.

ces:

ces: luego el paralelogrammo CG al EN tiene la misma proporcion que la base BC a la base EF: luego los triangulos,&c. que es lo que se avia, &c.

SCHOLIO.

Esta proposicion se puede convertir, que si dos triangulos, como ABC, EDF, ò dos paralelogrammos, como CG, EH tienen la misma proporcion que las bases BC, EF, estàn, ò pueden estar entre vnas mismas paralelas, ò que tienen igual altura. La demonstracion es como la de la 40. P. 1.

2 *Los triangulos, y paralelogrammos, que tienen iguales bases, ò vna misma, tienen la misma proporcion que las alturas, porque las alturas se compondràn en vna linea recta en lugar de las bases.*

THEOREMA 2. PROPOSICION 2.

En qualquier triangulo, la paralela a vn lado corta proporcionalmente los otros dos: y la linea que corta proporcionalmente dos lados de vn triangulo, es paralela al tercero.

En el triangulo ABC tirese la ED paralela al lado BC: digo, que los lados AB, AC quedan proporcionalmente cortados en los puntos D, y E; esto es, que como la AE a la EB, assi es la AD a la DC: tirēse las lineas BD, EC: luego (a) los triangulos EDB, DEC por tener vna misma base *ED*, y estar entre vnas mismas paralelas son iguales entre si: luego el triangulo ADC tiene la misma proporcion (b) al triangulo *EDB*, que al triangulo *DEC*. Pero (c) el triangulo *ADE* al triangulo *EDB* es como la base AE a la base *EB*, y el mismo triangulo *ADE* al triangulo *DEC* es como la

Fig. 4.
(a) 37. P. 1.
(b) 7. P. 5.
(c) 1. P. 6.

(d) 11. p. 5. base AD a la base DC: luego (d) tambien la linea AE a la linea EB es como la linea AD a la linea DC.

Lo segundo: sea la AE a la EB, como la AD a la DC: digo, que la linea ED es paralela al lado BC. (e) 1. p. 6. Porque como la base AE a la base EB, assi es (e) el triangulo ADE al triangulo EDB, y como la base (f) 11. p. 5. AD a la base DC, assi es el triangulo ADE al triãgulo DEC: luego (f) el triangulo ADE tiene la misma proporcion a los dos triãgulos EDB, DEC: (g) 9. p. 5. luego (g) estos son iguales, y tienen vna misma (h) 39. p. 1. base ED: luego (h) la linea ED es paralela al lado BC: luego en qualquier triangulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 3. PROPOSICION 3.

En qualquier triangulo la linea que divide vn angulo en dos mitades cortarà la base en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados; y la linea que corta la base en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados del triangulo divide el angulo en dos mitades.

Fig. 5. En el triangulo ABC la recta AD corte primèramente al angulo BAC en dos mitades: digo, que los segmentos BD, y DC quedan proporcionales a los lados BA, y AC; esto es, què como BA a AC, assi (a) 31. p. 1. es BD a DC. Por el punto B (a) tirese la BE paralela a la DA, y alarguese la linea CA, hasta que con-

concurra con la BE en el punto E: luego el angulo DAC externo es igual (b) al angulo BEA interno, y opuesto; y el angulo BAD igual a su alterno ABE; pero los angulos DAC, BAD se suponen iguales: luego (c) los angulos BEA, ABE tambien son iguales: luego (d) las lineas EA, BA son iguales, y (e) tienen la misma proporcion a la AC; pero la linea EA a la AC (f) en el triangulo BEC tiene la misma proporcion que la BD a la DC: luego (g) la BA a la AC tambien es como la BD a la BC.

(b) 29. P. 1.

(c) ax. 1.

(d) 6. P. 1.

(e) 7. P. 5.

(f) 2. P. 6.

(g) 11. P. 5.

Lo segundo: sea la BA a la AC, como la BD a la DC: digo, que la linea AD corta al angulo BAC en dos mitades. Porque hecha la misma construcion como antes; será (f) la EA a la AC, como la BD a la DC, pero se supone tambien la BA a la AC, como la BD a la DC; luego (g) la EA a la AC es como la BA a la AC: luego (h) las lineas EA, BA son iguales, y los angulos (i) BEA, ABE son tambien iguales; pero el angulo DAC externo es igual al angulo BEA interno, y opuesto (b) y el BAD igual a su alterno ABE: luego (c) los angulos BAD, DAC son tambien iguales: luego en qualquier triangulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(h) 9. P. 5.

(i) 5. P. 1.

THEOREMA 4. PROPOSICION 4.

En los triangulos equiangulos, los lados que comprehenden iguales angulos, son proporcionales; y los que se oponen

a iguales angulos, son homologos, ò de semejante razon.

Sean los triangulos ABC, DCE equiangulos, que tengan los angulos ABC, DCE iguales, y los ACB, DEC, y el tercero BAC al tercero CDE: digo, que los lados que comprehenden iguales angulos, son proporcionales, esto es, que AB a BC es como DC a CE, y *BC* a CA, como *CE* a ED, y BA a *AC*, como *CD* a DE, y los antecedentes siempre se oponen a iguales angulos, y tambien los consequentes. Componganse los lados *BC*, y *CE* en vna linea recta, y serà el externo *DCE* igual al angulo *ABC* interno, y opuesto: luego (a) las lineas *BA*, *CD* son paralelas. De la misma suerte las lineas *AC*, *DE* son paralelas, por ser el angulo *ACB* externo igual al interno, y opuesto *DEC*. Alarguense las lineas *BA*, y *DE* hasta que concurran en el punto F, y serà el quadrilatero *ACDF* paralelogrammo: luego (b) los lados *AC*, *FD*, y tambien *AF*, *CD* son iguales. Siendo pues en el triangulo *BFE* la linea *AC* paralela al lado *FE*, serà (c) la *BA* a la AF, ò (d) a su igual *CD*, como la *BC* a la *CE*: luego alternando (e) como la *BA* a la *BC*, assi es la *CD* a la *CE*. Assimismo en el triangulo *BFE* por ser la linea *CD* paralela al lado *BF*, serà (c) la linea BC a la linea CE, como la FD, ò su igual AC a la DE, y alternando como la BC a la AC, assi la CE a la DE. Aviendo pues tres lineas BA, BC, AC, y otras tres CD, CE, DE en proporcion ordenada, que cada dos tienen la misma pro-

Fig. 6.

(a) 28. P. 1.

(b) 34. P. 1.

(c) 2. P. 6.

(d) 7. P. 5.

(e) 16. P. 5.

proporcion: luego (f) por la igualdad de razon es, como la *BA* a la AC, assi la CD a la DE: luego en los triangulos equiangulos los lados que comprehenden iguales angulos son proporcionales, &c. y los (g) triangulos son semejantes entre si. (f) 22. P. 5. (g) 1. def. 6.

COROLARIOS.

1 De aqui se sigue, que si en vn triangulo como ABC a qualquier lado como BC se tira vna paralela como DE esta cortarà vn triangulo ADE semejante al triangulo dado ABC. Porque (h) estos dos triangulos son equiangulos: luego (i) son semejantes. Fig. 7. (h) 29. P. 1. (i) 4. P. 6.

2 Siguese lo segundo, que si en qualquier triangulo como ABC a vn lado como BC se tira vna paralela como DE, y del angulo A qualquier recta como AG, que esta cortarà a la paralela DE, y al lado BC en partes proporcionales; esto es, que DF a FE es como BG a GC. Porque (k) la BG a la GA es como la DF a la FA, y la GA a la GC es como la FA a la FE: luego (l) por la igualdad de razon serà la BG a la GC como la DF a la FE, que es lo que, &c. (k) 1. Cor. 4. P. 6. (l) 22. P. 5.

THEOREMA 5. PROPOSICION 5.

Si dos triangulos tienen lados proporcionales, son equiangulos, y los angulos que se oponen a lados homologos son iguales entre si.

Tengan los triangulos ABC, DEF lados proporcionales, esto es, sea AB a BC como DE a EF, y BC a CA como EF a FD, y CA a *AB* como FD a D*E*: digo, que estos dos triangulos son equiangulos, y el angulo A es igual al angulo D, el angulo *B* igual al angulo D*EF*, y el *C* igual al *EFD*, y desta suerte los angulos iguales se opondràn a los lados homologos. Al angulo *B* haga se (a) igual el angulo FEG, y al angulo C igual el angulo *EFG*, y serà (b) el tercero Fig. 8. (a) 23. P. 1. (b) 32. P. 1.

(c) cero *A* igual al angulo G: luego los triangulos ABC,
4.p.6. FEG son equiangulos, y ferà [c] la AB a la BC; esto es la *DE* a la EF por la suposicion, como la *GE* a
(d) la misma *EF*: luego [d] las lineas *DE*, *GE* son
9.p.5. iguales. Assimismo la linea [c] *BC* a la *CA*; esto es la *E*F a la F*D* por la suposicion tiene la misma proporcion que la misma EF a la FG: luego [d] las lineas F*D*, FG son iguales; y porque en los triangulos FE*D*, FEG los dos lados *DE*, *EF* son iguales a los lados G*E*, *E*F, y la base *D*F igual a la base GF,
(e)
8.p.1. ferà [e] el angulo *DEF* igual al angulo G*E*F, ò a su igual *B*, y el angulo *EFD* es igual al angulo
(f) *E*FG, ò a su igual *C*, y [f] l tercero *D* es igual al ter-
32.p.1. cero *A*: luego si dos triangulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 6. PROPOSICION 6.

Si dos triangulos tienen vn angulo igual a vn angulo, y los comprehenden lados proporcionales, feràn equiangulos, y tendràn iguales los angulos que se oponen a lados homologos.

Fig. 8. Tengan los triangulos *ABC*, *DEF* los angulos *B*, y *D*EF iguales, y los lados *AB*, *BC*, *DE*, EF proporcionales: digo, que tambien el angulo *C* es igual al angulo *EFD*, y el angulo *A* al angulo *D*, que se oponen a los lados homologos. Hagase el angulo *FE*G igual al angulo B, y el *E*FG igual al angulo *C*,

y seràn los triangulos ABC, GEF equiangulos: luego es (a) como la AB a la BC, assi GE a la EF; pero como la AB a la BC, assi se supone la DE a la EF: luego es (b) como la GE a la EF, assi la DE a la misma EF: luego las rectas (c) GE, y DE son iguales; y porque los triangulos DEF, GEF tienen dos lados DE, EF iguales a los lados GE, EF, y los angulos DEF, GEF iguales, serà el angulo (a) D igual al angulo G, ò a su igual A, y el DFE igual al angulo EFG, ò a su igual C: luego si dos triangulos, &c. que es lo que se avia de demostrar. (a) 4. p. 6. (b) 11. p. 5. (c) 9. p. 5.

COROLARIO.

En los triangulos semejantes las bases, y alturas son proporcionales; y si las bases, y alturas son proporcionales, y vn angulo igual a vn angulo, los triangulos son semejantes.

En los triangulos semejantes ABC, DEF sean los angulos ABC, DEF iguales, y las rectas AH, DK perpendiculares a las bases BC, EF, serà (a) el angulo BAH igual al angulo EDK, y los triangulos ABH, DEK (b) son semejantes: luego es (b) como la BC a la BA, assi la EF a la ED (en los triangulos ABC, DEF) y como la BA a la AH, assi la ED a la DK (en los triangulos BAH, EDK) luego (c) por la igualdad es como la BC a la AH, assi la EF a la DK. Fig. 8. (a) 32. P. 1. (b) 4. P. 6. (c) 22. P. 5.

Lo segundo, dados los angulos ABC, DEF iguales, sea como la BC a la AH, assi la EF a la DK serà alternando

 como

como la BC a la EF assi la AH a la DK; pero como la AH a la DK, assi es la AB a la DE en los triangulos equiangulos
(a) AB H, DEK: luego (d) es como la BC a la EF, assi la
11. P. 5. AB a la DE, y alternando como la BC a la AB, assi la EF
(e) a la DE: luego (e) los triangulos ABC, DEF son equian-
6. P. 6. gulos, y semejantes.

La misma demonstracion se entiende de los paralelogrammos, porque se dividen en dos triangulos iguales, y semejantes.

THEOREMA 7. PROPOSICION 7.

Si dos triangulos tienen vn angulo igual a vn angulo, y a otro le comprehenden lados proporcionales, y el tercero de entrambos es menor, ò no menor que vn recto, seràn equiangulos, y tendràn iguales los angulos comprehendidos de lados proporcionales.

Fig. 9. Los triangulos ABC, DEF tengan los angulos A, y D iguales, y los lados AC, CB del vno, proporcionales à los lados DF, FE del otro, y los angulos E, y B cada vno sea menor, ò no menor que vn recto: digo, que los triangulos ACB, DFE son equiangulos, y que los angulos F, y ACB comprehendidos de lados proporcionales, son iguales.

Lo primero sea cada vno de los angulos B, y E menor que vn recto: y si el angulo ACB no es igual
(a) al angulo F, sea mayor, y hagase (a) el angulo *ACG*
23. P. 1. igual al angulo F, y serà (b) el tercero *AG* igual al
(b) 32. P. 1. tercero *E*, y seràn equiangulos los triangulos *AGC* *DEF*:

DEF: luego (c) como la DF a la *FE* (esto es, como la *AC* a la *CB* por la suposicion) assi es la misma *AC* a la CG: luego las GG, CB (d) son iguales: luego los angulos (e) CBG, CGB seràn iguales; pero el angulo B se supone menor que vn recto; luego el angulo CGB tambien es menor que vn recto: luego (f) su complemento *CGA* es mayor que vn recto; pero el angulo *CGA* està demostrado igual al angulo *E*: luego el angulo *E* serà mayor que vn recto, lo que es contra la suposicion: luego el angulo *ACB* no puede ser mayor que el angulo *F*, ni tampoco menor por la misma demonstracion: luego son iguales, y (g) el tercero B al tercero *E*. Lo segundo sean los angulos *B*, y *E* cada vno no menor que vn recto, y hecha la misma construccion se demuestra como antes, que el angulo B serà igual al angulo CGB: luego el angulo CG*B* serà tambien no menor que vn recto, lo que (h) no puede ser: luego el angulo *ACB* es igual al angulo F, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(c) 4. p. 6.
(d) 9. p. 5.
(e) 5. l. 1.
(f) 13. p. 1.
(g) 32. p. 1.
(h) 17. p. 1.

THEOREMA 8. PROPOSICION 8.

En el triangulo rectangulo la perpendicular desde el angulo recto a la base haze dos triangulos semejantes entre si, y al entero.

En el triangulo rectangulo *ABC* desde el

 angu-

angulo recto A cayga la perpendicular AD: digo, que los triangulos ADB, y ADC son semejantes entre si, y al triangulo ABC. Porque en los triangulos ADB, y ABC los angulos ADB, y BAC son (a) rectos, y el angulo B comun: luego (a) el tercer an- 32, p. 1, gulo DAB es igual al tercero C: luego los triangu- (b) 4. p. 6. los ADB, ABC son equiangulos (b) y semejantes entre si. Tambien en los triangulos ADC, y ABC los angulos ADC, y CAB son rectos, y el angulo C comun: luego (a) el tercero CAD es igual al tercero B: luego (b) los triangulos ADC, y CAB son semejantes. Assimismo en los triangulos ADB, y ADC los angulos en el punto D son rectos, y el angulo DAB està demostrado igual al angulo DCA, y el ABD al DAC: luego los triangulos ADB, y ADC son equiangulos, y (b) semejantes, que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIOS.

1 La perpendicular AD es media proporcional entre los segmentos de la base, porque siendo los triangulos ADB, ADC semejantes, serà (b) como CD a DA, assi DA a DB, ò como BD a DA, assi DA a DC: luego la linea DA es media proporcional entre los segmentos BD, y DC.

2 Qualquiera lado de los que comprehenden el angulo recto, es medio proporcional entre toda la base, y el segmento adjacente al dicho lado, y assi el lado AB es medio proporcional entre la base CB, y el segmento BD. Porque los triangulos ABC, ABD son semejantes: luego es (b) como la linea CB a la AB en el triangulo ABC, assi la linea AB a la BD en el triangulo ABD. Por la misma razon, el lado AC es medio proporcional entre la base BC, y el segmento CD. Porque los triangulos ACB, ACD son semejantes: luego es como BC a la AC en el triangulo

gulo ACB, assi la AC a la CD en el triangulo ACD.

PROBLEMA 1. PROPOSICION 9.

De vna linea recta dada cortar la parte que se pide.

De la linea recta dada AB aya de cortarse la tercia parte AF pedida. De vn extremo de la linea dada tirese con qualquier angulo la linea AC, y tomense en ella tres partes iguales AD, DE, y EC de qualquier magnitud [tantas partes se han de tomar en la linea AC en quantas se pide diuidida la AB] y tirese la recta CB, y por el punto D a la linea CB la paralela DF: digo, que la linea AF es la tercera parte que se pide de la linea AB. Porque en el triangulo ACB a la base CB està tirada la paralela DF: luego es (a) como la CD a la DA, assi la *BF* a la FA, y componiendo (b) como CD, y DA juntas a la DA, assi las *BF*, y *FA* juntas a la *FA*; pero la linea CA es tripla de la *DA* por la construccion: luego la linea *AB* es tambien tripla de la *FA*: luego de la linea recta dada se cortò, &c. que es lo que se avia de hazer.

Fig. 11.

(a) 2. P. 6.

(b) 18. P. 5.

La misma construccion se harà si se pidieren partes, como dos quintas de la *AB*, tomando cinco partes iguales en la *AC*, y tirando la linea *CB*, y por el punto D, que sea el termino de las dos quintas pedidas, la linea DF paralela a la base CB, serà la linea

nea AF dos quintas partes de la linea AB : la demonstracion es la misma.

PROBLEMA 2. PROPOSICION 10.

Cortar vna recta dada en partes semejantes a las de otra recta dada.

Fig. 12. La recta dada AB se ha de cortar en partes semejantes a las AD, DE, EC de la recta AC. Juntense entrambas en el extremo A, y tirese la recta BC, y por los puntos D, y E las paralelas DF, EG a la recta CB: digo, que la recta AB queda cortada en los puntos F, y G en partes semejantes a las AD, DE, EC. Porque en el triangulo AEG a la base EG està tirada la paralela DF: luego (a) como AD a DE, assi es AF a FG: luego estas partes son semejantes. Tirese la DH paralela a la AB, que corta la EG en el punto I; y porquanto en el triangulo DCH la EI es paralela a la CH: luego (a) como DE a EC, assi es DI a IH; pero FG, y GB son iguales a las DI, IH: luego como DE a EC, assi es FG a GB: luego la recta AB està cortada en partes semejantes a las de la AC, que es lo que se avia de hazer.

(a) 2. l. 6.

SCHOLIO.

Fig. 13. *De aqui se infiere el modo de que se puede cortar vna recta dada como la AB en quantas partes iguales se pidiere. Ayase de dividir en seis partes iguales; tomense en la recta AC seis partes iguales AD, DE, &c. de qualquier longitud: ire-*

tirese la recta CB, y por los puntos D, E, F, G, H las paralelas a la base CB, quedará la linea AB cortada en seis partes iguales en los puntos N, M, L, K, I, por (b) ser semejantes a las partes de la recta AC. (b) 10. P. 6.

OTRO MODO.

Ayase de dividir la AB en seis partes iguales. Tirese la recta BC por el extremo B, y por el otro A la recta AD paralela a la BC, ò haziendo iguales angulos ABC, BAD, y tomense en la recta BC desde el punto B cinco partes iguales hasta I, y en la AD tomense las mismas, y de la misma longitud desde el extremo A hasta O [tantas se han de tomar en quantas se ha de dividir la AB menos vna,] y tirense las rectas EO, FN, GM, HL, IK: digo, que la recta AB està dividida en seis partes iguales en los puntos P, Q, R, S, T. Porque las lineas IH, KL son iguales, y paralelas: luego las IK, HL (c) son tambien iguales, y paralelas. Por la misma razon son paralelas las demas GM, FN, EO: luego (b) en el triangulo PAO por ser la linea AO dividida en cinco partes iguales, tambien la recta AP queda dividida en cinco partes iguales. De la misma suerte la recta BT queda dividida en cinco partes iguales: luego por ser las lineas AT, BP iguales a las demàs son tambien iguales entre si, y està la linea AB dividida en seis partes iguales. Fig. 14. (c) 33. P. 1.

PROBLEMA 3. PROPOSICION 11.

A dos rectas dadas hallar la tercera proporcional.

A las rectas AB, AC (*juntas en qualquier angulo*) se ha de hallar la tercera proporcional: esto es, que como AB a AC, assi la AC a otra tercera. Alarguese la AB, que ha de ser el antecedente, y tomese la BD igual al consequente AC: tirese la recta CB, y por el punto D (a) la DE paralela a la BC: digo, que la CE es la tercera proporcional que se busca. Porque en el triangulo ADE a la base DE està tirada la paralela BC: lue- Fig. 15. (a) 31. P. 1.

(b) 2. P. 6. luego (b) como *AB* a *BD*, ò a ſu igual *AC*, aſsi es la *AC* a la CE: luego a dos rectas, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

OTRO MODO.

Fig. 10. Las lineas dadas CD, *DA* componganſe en el angulo recto, *CDA*, tireſe la linea *CA*, y a la *AC* en el punto *A* hagaſe la perpendicular *AB*, alargueſe la recta *CD* haſta que concurra con la *AB* en el punto *B*, y ſerà (c) la linea *DB* la tercera proporcional que ſe buſca. (c) 8. P. 6.

SCHOLIO.

No es fuera de la materia deſta propoſicion demoſtrar la naturaleza de las proporciones en los dos Lemmas ſiguientes del P. Tacquet, que tendràn grande vtilidad para la conſideracion de los ſolidos.

LEMMA 1.

Si la razon de la menor deſigualdad ſe continùa ſiempre, ſe llegarà a vna cantidad mayor que qualquiera propueſta.

Fig. 15. *La cantidad LO a LR tenga la proporcion de menor deſigualdad, y ſea como LO a LR, aſsi LR a LQ, y LQ a LI, &c. y ſerà invirtiendo como la LQ a LR, aſsi la LR*

a

a LO: luego (a) dividiendo como QR a RL, assi es RO a OL, y alternando como QR a RO, assi RL a OL; pero RL es mayor que OL: luego QR es mayor que RO. De la misma suerte se demuestra, que la IQ es mayor que QR, y assi en adelante; y porque continuando la proporcion que LO tiene a LR, a la primera LO se añaden las partes OR, RQ, QI, &c. siempre mayores, se llegarà finalmente a vna cantidad mayor que qualquiera propuesta, que es lo que se avia de demostrar. (a) 17. P. 1.

LEMMA 2.

Si la razon de mayor desigualdad se continùa: se llegarà a vna cantidad menor que qualquiera propuesta.

Sea la LO la cantidad pequeña propuesta, y sea la razon de mayor desigualdad de la AB a CB: digo, que si esta razon se continùa, se llegarà a vna cantidad menor que la propuesta LO. Hagase (a) como la BC a la BA, assi la propuesta LO a la LR, y continùese (b) la razon de LO a LR, hasta que se llegue a vn termino como LI, que sea mayor que la AB, y quantas vezes està continuada la razon LO *a* LR, *otras tantas se continùe la de AB a CB por los terminos CB, EB, FB, y serà la magnitud FB menor que la* OL. *Porque las magnitudes* IL, QL, RL, OL *son proporcionales a las AB, CB, EB, FB, por la construccion: luego (c) por la igualdad de razon es como la* IL *a la* OL, *assi la AB a la FB, y alternando (d) como la* IL *a la AB,* Fig. 15. (a) 9. P. 6. (b) Lem. ant. (c) 22. P. 5. (d) 16. P. 5.

assi la OL a la FB; pero la IL es mayor que la AB por la construccion: luego la OL es mayor que la FB, que es lo que se avia de demostrar.

PROBLEMA 4. PROPOSICION 12.

A tres rectas dadas hallar la quarta proporcional.

A las rectas AB, BC, AD se ha de hallar otra
Fig. 16. quarta proporcional, esto es, que como AB a BC, assi AD a otra quarta. Las dos AB, y BC antecedente, y consequente componganse en la recta AC, y la tercera AD haga qualquier angulo, como BAD con la primera AB, tirese la DB, y por el pũto C la CE paralela a la DB, alarguese la AD, hasta que concurra con la CE en el punto E: digo, que la recta DE es la quarta proporcional que se busca. Porque en el triangulo AEC a la base EC está ti-
(a) rada la paralela DB: luego (a) como AB a BC, assi
2. p. 6. AD a DE: luego a las tres rectas, &c. que es lo que se avia de hazer.

PROBLEMA 5. PROPOSICION 13.

Entre dos rectas dadas, hallar la media proporcional.

Fig. 17. Entre las rectas AB, BC se ha de hallar vna media

dia proporcional, esto es, como AB a la que se busca, assi esta misma a la BC. Componganse las rectas AB, BC dadas en la recta AC, y dividida por mitad en el punto E; describase el semicirculo ADC con la distancia EA, ò EC, y por el punto B tirese la BD perpendicular a la AC: digo; que la BD es la media proporcional, que se busca. Porque tiradas las rectas AD, DC (b) el angulo ADC es recto en el semicirculo, y desde el angulo recto està tirada a la base la perpendicular DB: luego (c) como AB a BD, assi es BD a DC: luego entre las dos rectas, &c. que es lo que se avia de hazer.

(b) 31. P. 3.

(c) 1. Cor. 8. P. 6.

COROLARIOS.

1 De aqui se sigue, que si en vn circulo de qualquier punto de la circumferencia, como del punto D se tira vna perpendicular al diametro AC, como la DB siempre es media proporcional entre los segmentos AB, BC del diametro.

2 Siguese lo segundo; que la media proporcional entre dos rectas dadas, como entre las AB, y BC, no puede ser mayor, que la mitad de la suma de las dos rectas dadas; porque nunca puede ser mayor que el semidiametro, que es igual a la mitad de la suma.

THEOREMA 9. PROPOSICION 14.

Los paralelogrammos iguales, que tienen vn angulo igual a vn angulo, tienen reciprocos los lados que comprehenden iguales angulos; y los paralelogrammos que tienen reciprocos los lados que comprehenden iguales angulos, son iguales.

Fig. 18. Los paralelogrammos AC, BF iguales, tengan iguales los angulos ABC, EBG: digo, que los lados AB, BC son reciprocos a los lados BG, BE, esto es, que como AB a BG, assi es EB a BC. Juntense los paralelogrammos por los angulos iguales de suerte, que los lados AB, BG se compongan en vna recta, quedaràn los lados EB, BC tambien en vna recta, porque los dos angulos ABC, y EBG se suponen iguales: luego añadiendo a cada vno el angulo CBG, quedaràn los dos angulos ABC, y CBG juntos iguales a los dos EBG, y CBG juntos; pero los
(a) 13. P. 1. dos angulos (a) ABC, y CBG son iguales a dos rectos: luego los EBG, y CBG son tambien iguales a dos rectos: luego los lados BE, y BC (b) compo-
(b) 14. P. 1. nen vna recta. Alarguense las lineas DC, y FG, hasta que concurran en el punto H, y serà BH vn paralelogrammo. Siendo pues los paralelogrammos
(c) 7. P. 5. AC, BF iguales, tendràn al tercero BH (c) la misma proporcion: luego como AC a *BH*, assi es *BF* a
(d) 1. P. 6. *BH*; pero (d) AC a *BH* es como la base *AB* a la base *BG*, y el *BF* a *BH* es como la base EB a la base BC

BC: luego como AB a BG, assi es (e) EB a BC. (e) 11. p. 5.

Digo lo segundo, que si los lados AB, BC son reciprocos a los lados BG, BE, y los angulos ABC, EBG iguales, que los paralelogrammos AC, y BF son iguales. Hecha la misma construccion que antes, por quanto se dà como AB a BG, assi EB a BC; pero como la base AB a la base BG (f) assi es el paralelogrammo AC al BH, y como la base EB a la base BC, assi el paralelogrammo BF al BH: luego (e) como AC a BH, assi es BF al mismo BH: luego (g) los dos paralelogrammos AC, y BF son iguales: luego los paralelogrammos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(f) 1. p. 6.

(g) 9. p. 5.

THEOREMA 10. PROPOSICION 15.

Los triangulos iguales que tienen vn angulo igual a vn angulo, tienen reciprocos los lados que comprehenden iguales angulos; y los triangulos que tienen reciprocos los lados que comprehenden iguales angulos, son iguales.

Los triangulos iguales ABC, DBE tengan los angulos CBA, EBD iguales: digo, que tienen reciprocos los lados que comprehenden estos angulos, como AB a BE, assi DB a BC. Porque si los lados AB, y BE se juntan de suerte, que compongan vna linea recta, tambien los lados AB, y BE compondràn vna recta, como queda demostrado en la antecedente: tirese la

Fig. 19.

la recta CE: luego los triangulos ABC, DBE igua-
(a) 7. P. 5. les (a) tendràn la misma proporcion al tercero CBE, esto es, que como ABC à CBE, assi DBE al
(b) 1. P. 6. mismo CBE, pero (b) la base *AB* a la base *BE* es como el triangulo *ABC* al triangulo *CBE*, y la base *DB* a la base *CB* es como el triangulo *DBE* al
(c) 11. P. 5. *CBE*: luego (c) como *AB* a *BE*, assi es *DB* a *BC*.

Sean lo segundo reciprocos los lados que comprehenden los angulos *CBA*, *EBD* iguales, como *AB* a *BE*, assi *DB* a *BC*: digo, que los triangulos ABC, y DBE son iguales. Porque hecha la misma construccion que antes, el triangulo ABC al triangulo CBE es como la base AB a la base BE, y el triangulo DBE al triangulo CBE (b) es como la base DB a la base BC: luego (c) como el triangulo ABC al BCE, assi es el triangulo DBE al mismo BCE: luego
(d) 9. P. 5. (d) los triangulos ABC, DBE son iguales: luego los triangulos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Esta proposicion tambien se demuestra por la antecedente; porque si los triangulos ABC, DBE se cumplen para paralelogrammos en los angulos iguales ABC, DBE, quedaràn (f) los paralelogrammos
(e) 34. P. 1. iguales, y serà la misma demonstracion que de la antecedente.

CO-

COROLARIO.

Los triangulos iguales tienen bases, y alturas reciprocas; y si las bases, y alturas son reciprocas, los triangulos son iguales.

Sean iguales los triangulos ABC, DBE, *y sean sus bases AC, DE, y sus alturas, ò iguales a ellas, las perpendiculares AF, GE, y serà (a) el triangulo AFC igual al triangulo* ABC, *y el DGE al DBE: luego los triangulos rectangulos CAF, DEG son tambien iguales entre si, y tendràn (b) reciprocos los lados que comprehenden iguales angulos, como AC a DE, assi EG a AF; esto es las bases, y alturas seràn reciprocas.* Fig. 19. (a) 37. P. 1. 1. P. 6. (b) 15. P. 6.

Lo segundo, si es como la base AC a la base DE, assi la altura EG a la altura AF, los triangulos DEG, CAF (b) seràn iguales entre si: luego sus iguales ABC, DBE *tambien seràn iguales entre si.*

Lo mismo se entiende en los paralelogrammos.

THEOREMA 11. PROPOSICION 16.

Si quatro rectas son proporcionales, el rectangulo de las extremas es igual al rectangulo de las medias; y si el rectangulo de las extremas es igual al rectangulo de las medias, las quatro rectas son proporcionales.

Sean lo primero las quatro rectas AB, FG, EF, BC proporcionales, como AB a FG, assi EF a BC, y sea el rectágulo AC comprehédido de las extremas AB, BC, Fig. 20.

y el rectangulo EG de las medias FG, EF: digo, que los rectangulos AC, y EG son iguales. Porque los angulos B, y F son rectos, y los lados que los comprehenden son reciprocos, como AB a FG, assi EF a
(a) 14. P. 6. BC: luego (a) los paralelogrammos AC, y EG son iguales.

Sean lo segundo los paralelogrammos AC, y EG iguales: digo, que las quatro rectas AB, FG, EF, BC son proporcionales. Porque los angulos B, y F son rectos, y los rectangulos AC, y EG se suponen iguales: luego (a) tienen reciprocos los lados que comprehenden iguales angulos como AB a FG, assi EF a BC: luego si quatro rectas, &c. que se avia de demostrar.

S C H O L I O.

Si quatro rectas no son proporcionales, y la primera a la segunda tiene mayor razon que la tercera a la quarta, el rectangulo de las extremas es mayor que el de las medias; y si el rectangulo de las extremas es mayor que el de las medias, la primera a la segunda tiene mayor razon que la tercera a la
Fig. 20. quarta.

Porque si vna recta (como H) tiene mayor razon a la
(b) *segunda FG, que la tercera EF a la quarta* BC, *esto es, que*
10. P. 5. *la* AB *a la* FG *(suponiendo las* AB, FG, EF, BC *proporciona-*
(c) 1. P. 6. *les) serà (b) la recta H mayor que la* AB*: luego (c) el*
rectan-

rectangulo de la H, y de la BC será mayor que el de las AB, y BC, esto es (d) que el de las medias FG, y EF; y si el rectangulo de la H, y de la BC es mayor que el de las FG, EF, esto es, mayor que el (d) de las AB, BC será (e) la H mayor que la AB: luego (f) la mayor H a la FG tiene mayor razon que la menor AB a la misma FG, esto es, que la EF a la BC. (d) 16. p. 6. (e) 1. p. 6. (f) 8. p. 5.

Y si la primera a la segunda tiene menor razon que la tercera a la quarta, el rectangulo de las extremas será menor que el de las medias; y si el rectangulo de las extremas es menor que el de las medias, la primera a la segunda tiene menor razon, que la tercera a la quarta. Porque entonces la H avrá de ser menor que la AB, como se demostrará por las mismas proposiciones citadas para la primera parte.

Lo que se dize de rectangulos se entiende tambien de otros qualesquiera paralelogrammos equiangulos en toda esta proposicion.

THEOREMA 12. PROPOSICION 17.

Si tres rectas son proporcionales el rectangulo de las extremas es igual al quadrado de la media; y si el quadrado de la media es igual al rectangulo de las extremas, las tres rectas son proporcionales.

Sean las tres rectas AB, EF, BC proporcionales: digo, que el rectangulo AC contenido de las extremas AB, BC es igual al quadrado EG de la media EF. Porque si se toma la linea FG igual a la EF, Fig. 21.

ferán las quatro rectas AB, EF, FG, BC proporcionales: luego (a) el rectangulo AC es igual al rectangulo EG; pero EG es quadrado: luego el rectangulo de las extremas es igual al quadrado de la media.

(a) 16. P. 6.

Sea lo segundo el quadrado EG igual al rectangulo AC: digo, que las rectas AB, EF, BC son proporcionales. Porque (a) como AB a EF, assi es FG, ò su igual EF a BC: luego la recta EF es media proporcional entre las AB, y BC: luego si tres rectas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que qualquier recta es media proporcional entre otras dos rectas, que comprehendan vn rectangulo igual al quadrado de la dicha linea.

NOTA.

De lo demostrado desde la proposicion 13. hasta esta, se sigue el Problema siguiente de Don Antonio Hugo, natural de Sanlucar de Barrameda, amigo nuestro, de quien espera la Geometria en este siglo de cultissimos ingenios su mayor pulimento, con el qual tiene resueltos los mas dificiles Problemas, que han exercitado los ingenios de los passados Geometras, cuyos trabajos verán muy presto la publica luz.

PRO-

PROBLEMA.

Hallar dos rectas reciprocas a otras dos dadas, cuya suma, ò diferencia sea conocida.

Lo primero sea la AB la suma de dos rectas, que se ha de dividir en dos segmentos AX, XB reciprocos a las rectas dadas MC, CQ; esto es que sea como MC a AX, assi XB a CQ: busquese (a) entre las MC, CQ la media proporcional CD, ò su igual BG, y pongase perpendicular a la AB, en qualquier extremo como B, y sobre el diametro AB describase el semicirculo AFB, tirese la GF paralela a la AB, hasta que llegue a la circumferencia, y desde el punto F donde la corta, ò toca, cayga la perpendicular FX: digo que la AB està dividida en el punto X en dos partes reciprocas a las rectas dadas MC, CQ. Porque BF es vn paralelogrammo por la construccion: luego FX es igual a la BC; pero la BG es media proporcional entre las MC, CQ: luego la FX es media entre estas mismas: luego (b) el quadrado de la FX es igual al rectangulo de las MC. CQ; pero (c) el quadrado de la misma FX tambien es igual al rectangulo de las AX, XB: luego los rectangulos de las AX, XB, y de las MC, CQ son iguales: luego (d) es como la MC a la AX, assi la XB a la CQ.

Fig. 22. (a) 13. P. 6. (b) 17. P. 6. (c) 13. y 17. P. 6. (d) 16. P. 6.

Lo segundo sea la AB diferencia de las partes que se buscan. Tirese la AS perpendicular à la AB Fig. 23.

[en qualquier extremo como A] y igual a la media proporcional BG, ò CD. Dividase la AB por medio en el punto P, y dèl con la distancia PS describase el semicirculo XSR: digo, que las XA, XB, cuya diferencia es la recta AB son reciprocas a las rectas dadas MC, CQ. Porque (e) 15.def.1 *(e) las PX, PR son iguales, y las* PA, PB *tambien iguales por la construccion: luego las* (f) 3. ax. 1. *(f) residuas* XA, BR *que dan iguales. y añadiendo a entrambas la* AB, *quedan las* XB, AR *iguales; pero la AS es media proporcional* (g) 13. P. 6. *(g) entre las XA, AR: luego tambien es media entre las* XA, XB *: luego* (h) 17. P. 6. *(h) el rectangulo de las* XA, XB *es igual al quadrado de la AS, ò de su igual CD, ò al rectangulo de las MC, CQ: luego* (i) 16. P. 6. *(i) es como la MC a la* XB, *assi la XA a la CQ, que es lo que se avia de hazer.*

COROLARIO SVYO.

De aqui se sigue, que la diferencia de dos quadrados es igual al rectangulo contenido de la suma de sus lados, y de la diferencia entre ellos. Porque el quadrado de la AS, que es la diferencia (l) 47. P. 1. *(l) entre los quadrados de las AP, y PS es igual al rectangulo* (m) 13. y 17. P. 6. *(m) de las XA, AR: pero la AR es la suma de los lados de los quadrados AP, y PS, y la XA es la diferencia entre estos dos lados: luego, &c.*

PROBLEMA 6. PROPOSICION 18.

Sobre vna linea recta dada describir vn rectilineo semejante, y semejantemente puesto a vn rectilineo dado.

Fig. 24. Sobre la recta dada AB se ha de describir vn recti-

tilineo semejante al rectilineo dado CDEFG: desde qualquier angulo como F a cada angulo opuesto tirense las rectas FC,FD, y queda resuelto el rectilineo dado en los triangulos, CDF, DEF, FGC. (a) 23. P. 1.
Al angulo DCF hagase (a) igual el angulo BAI, y (b) 13.ax.1.
al CDF el ABI, y concurriràn las lineas AI, BI (b) (c) 32. P. 1.
en el punto I, y serà el tercer angulo CFD igual (c)
al tercero AIB: luego (d) el triangulo AIB es semejante al triangulo CFD. Ademàs al angulo FDE (d) 4. P. 6.
hagase igual el angulo IBH, y al DFE el BIH, y concurran las rectas BH, IH en el punto H, serà el triangulo BHI semejante al triangulo DEF. Assimismo al angulo CFG hagase igual el angulo AIK, y al FCG el IAK, y cócurriràn las rectas IK, AK en el punto K, y serà el angulo K igual al angulo G, y el triangulo AKI semejante al triágulo CGF, y assi se prosigue en adelante, si el rectilineo dado tiene mas triá gulos: digo, que el rectilineo ABHIK es semejante, y semejantemente puesto al rectilineo dado CDEFG. Porque el angulo IAB se hizo igual al angulo FCD, y el IAK al FCG: luego el angulo total BAK es igual al total angulo DCG. Assimismo se demuestra, que el angulo ABH es igual al angulo CDE, y los demàs a los demàs cada vno al suyo: luego los rectilineos son semejantes. Però (e) como la (e) 4. P. 6.
AB a la BI, assi es la CD a la DF, y como la BI a la (f) 22. P. 5.
BH, assi es la DF a la DE: luego (f) por la igualdad de razon, como la AB a la BH, assi es la CD a la DE:

luego los lados, que comprehenden los angulos ABH, CDE iguales son proporcionales, y tambien
(g) 4. r. 6. los lados cerca de los angulos H, E, (g) y K, G iguales. Por la misma razon como la HI a la IB, assi es la EF a la FD, y la IB a la IA, como la FD a la FC, y la IA a la IK, como la FC a la FG: luego por la igualdad de razon es como la primera HI a la vltima IK, assi la primera EF a la vltima FG. De la misma suerte se demuestra, que los demàs lados que comprehenden iguales angulos son proporcio-
(h) 1. def. 6. nales: luego (h) los rectilineos son semejantes: luego sobre la recta dada, &c. que es lo que se avia de hazer.

THEOREMA 13. PROPOSICION 19.

Los triangulos semejantes estàn en duplicada razon de sus lados homologos, ò de semejante razon.

Fig. 25. Sean los triangulos ABC, DEF semejantes, y tengan iguales los angulos B, y E, y C con F, y sea como AB à BC, assi DE a EF, &c. de suerte que BC, y EF sean lados homologos, ó de semejante razon: digo, que los triangulos estàn en duplicada razon de la q̃ tienen los lados BC a EF, ò AB a DE, ò AC a DF, esto es, si a los lados homologos BC, EF se tomàre la tercera proporcional BG, el triangulo
(a) 10. d. f. 5 ABC al triangulo DEF tiene la misma razon, que la basis BC a la tercera proporcional BG, que es (a) la

la razon duplicada de la que la misma BC tiene a la EF: busquese (b) a las BC, EF la tercera proporcional BG de manera que BC, EF, BG sean continuas proporcionales, y sea la BC mayor que EF; cortese de la BC la BG igual a la tercera proporcional, y tirese la AG. Y por quanto es como A*B* a *BC* (c) assi DE a *EF* será permutando como *AB* a DE, assi *BC* a *EF*; pero como *BC* a *EF*, assi es por la construccion la *EF* a la *BG*: luego (d) como AB a DE, assi es EF a BG: luego los triangulos (e) ABG, DEF son iguales por tener lados reciprocos cerca de los angulos iguales B, y E: luego (f) el triangulo ABC tiene la misma razon al triangulo DEF, que al ABG; pero el triangulo ABC al ABG tiene la misma razon (g) que la base BC a la base BG: luego el triangulo ABC al DEF tiene tambien la misma razon que la BC a la BG; pero la BC a la BG tiene duplicada la razon de la que tiene a la EF: luego e triangulo ABC al DEF tiene duplicada la razon del lado BC al EF, que es lo que se avia de demostrar.

(b) 11. P. 6.
(c) 4. P. 6.
(d) 11. P. 5.
(e) 15. P. 6.
(f) 7. P. 5.
(g) 1. P. 6.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que dadas tres rectas continuas proporcionales, será como la primera linea a la tercera, assi el triangulo descripto sobre la primera al triangulo semejante descripto sobre la segunda, como està demostrado.

SCHO-

S C H O L I O.

Otra demonstracion mas universal.

Triangulos, y paralelogrammos semejantes tienen duplicada la razon de sus lados homologos.

Fig. 26. *Sean los triangulos ABC, DEF semejantes; y sea como AB a BC, assi DE a EF. De la primera AB, y de la ultima EF formese un triangulo en el angulo ABF igual al angulo ABC: luego (a) serà como la base BC a la base EF, ò como la AB a la DE, assi el triangulo ABC al triangulo ABF. Por la misma razon (a) el triangulo ABF al DEF serà, como la base AB a la base DE: aviendo pues tres cantidades continuas proporcionales (esto es los triangulos) ABC, AB, EF, DEF, la primera a la tercera tendrà (b) duplicada la razon que tiene a la segunda; pero la primera ABC a la segunda AB, EF tiene la razon del lado AB al lado DE, como està demostrado: luego el triangulo ABC al DEF tiene duplicada la razon del lado AB a su semejante DE.*

(a) 1. p. 6.

(b) 10. d. 5.

Lo que se dize de triangulos de la misma manera se demuestra de qualesquiera paralelogrammos semejantes. De la misma manera, si en lugar de las lineas AB, EF se toman las BC, DE, y se forma dellas el triangulo DBC equiangulo al ABC se demuestra que los tres triangulos ABC, DE, BC, DEF son continuos proporcionales, &c.

COROLARIOS.

1 De aqui se sigue, que entre qualesquiera dos triangulos, ó paralelogrammos semejantes ay vn triangulo, ó paralelogrammo medio proporcional.

2 Siguese lo segundo, que el rectangulo contenido de dos lados, es medio proporcional entre los quadrados de dichos lados.

3. Siguese lo tercero, que dadas quatro rectas proporcionales, el paralelogrammo de las extremas es igual al paralelogrammo equiangulo de las medias. Porque el paralelogrammo ABC a los dos paralelogrammos, el vno de las AB, EF, y el otro de las BC, DE tiene la misma razon, conviene a saber la de AB a DE, ò la de BC a EF, como està demostrado: luego (d) los paralelogrammos AB, EF, y BC, DE son iguales entre si. (d) 9. P. 5.

4. Siguese lo quarto, que si los triangulos, ò paralelogrammos ABC, DEF no son semejantes, sino solamente tengan vn angulo igual a otro, tendràn compuesta la razon de las dos razones de AB a DE, y de BC a EF. Porque la razon (e) del triangulo, ò paralelogrammo ABC al DEF està compuesta de las dos razones de ABC al BC, DE, y del BC, DE al DEF; pero el triangulo ABC al BC, DE es (f) como AB a DE, y el triangulo BC, DE al DEF es como BC a EF, como està demostrado: luego la razon del triangulo, ò paralelogrammo ABC al DEF està compuesta de las dos razones de AB a DE, y de BC a EF. (e) 5. def. 6. (f) 1. P. 6.

5 Siguese lo quinto, que los paralelogrammos, ó triangulos iguales, que tienen vn angulo igual a vn angulo, tienen reciprocos los lados que comprehenden iguales; y al contrario. Porque siendo los triangulos, ò paralelogrammos de las AB, EF, y de las BC, DE iguales, el triangulo, ò paralelogrammo ABC equiangulo a los propuestos tendrà (g) la misma proporcion a entrambos; pero el ABC al AB, EF es como la base BC a la base EF, y el mismo ABC al BC, DE es como la base AB a la base DE: luego es (h) como el lado AB al lado DE, assi reciprocamente el lado BC al lado EF. Y si se dà como el lado AB al lado DE, assi reciprocamente el lado BC al EF, seràn los triangulos, ò paralelogrammos de las AB, EF, y de las BC, DE iguales. Porque como el AB al DE, assi es el ABC al BC, DE; y como el BC al BF, assi el ABC al AB, EF: luego el triangulo, ó paralelogrammo ABC tiene la misma razon à los dos propuestos: luego (d) los propuestos son iguales entre si. Lo mismo se demuestra, si el triangulo, ò paralelogrammo DEF se coteja con los AB, EF, y BC, DE. (g) 7. P. 5. (h) 11. P. 5.

ABC.	AB,EF.	DEF.
	BC,DE.	

THEOREMA 14. PROPOSICION 20.

Semejantes polygonos se dividen en triangulos semejantes, en igual numero, y de semejante razon con los todos; y están en duplicada razon de sus lados homologos.

Fig. 27. Los polygonos ABCDE, FGHIK sean semejantes, y tengan iguales los angulos BAE, GFK; item los B, y G, &c. y sea como AB a BC, assi FG a GH, y como BC a CD, assi GH a HI, &c. de suerte, que los lados BC, GH, y CD, HI, &c. sean homologos: digo lo primero, que estos polygonos se dividen en semejantes triangulos, y en igual numero. Desde los angulos BAE, GFK, tirense las rectas AC, AD, FH, FI a cada angulo opuesto, y quedá divididos los polygonos en igual numero de triangulos. Y por quanto el angulo B se dà igual al angulo G, y los lados AB, BC proporcionales a los lados FG, y GH: luego el triangulo ABC (a) es equiangulo al triangulo FGH, y el angulo BAC igual al angulo GFH, y el BCA al GHF, que se oponen a los lados homologos: luego (b) estos dos triangulos son semejantes. Por la misma razon los triangulos AED, FKI son equiangulos, y semejantes; y tienen los angulos AED, FKI iguales, y ADE, FIK, y el tercero al tercero. Y porque es como AC a CB, assi FH a HG en los triangulos ABC, FGH semejantes, y como CB a CD,

(a) 6 p. 6.

(b) 4. p. 6.

CD, assi HG a HI en los polygonos semejantes: luego (c) por la igualdad de razon es, como AC a CD, assi FH a HI; y porque el angulo BCD se supone igual al angulo GHI, y el ACB es igual al FHG: luego el residuo ACD es igual al residuo FHI: luego (d) los triangulos ACD, FHI son equiangulos, y semejantes, porque cerca de angulos iguales tienen lados proporcionales. Assimismo se demostraràn semejantes los demàs triangulos, si huviere mas. (c) 22. P. 5. (d) 6. P. 6.

Digo lo segundo, que estos triangulos son homologos a los polygonos enteros, esto es, que como vn triangulo de vn polygono a su correspondiente triangulo del otro polygono, assi es el polygono al polygono. Porque por ser semejantes los triangulos ABC, FGH tendràn duplicada (e) la razon de los lados homologos AC, FH. Por la misma razon los triangulos ACD, FHI tendràn duplicada la razon de los mismos lados homologos AC, FH: luego el triangulo ABC al FGH tiene la misma razon, que el ACD al FHI. De la misma manera se demuestra, que el triangulo ADE al triangulo FKI tiene la misma razon que el triangulo ACD al triangulo FHI; y si huviere mas triangulos se demostrarà lo mismo: luego los triangulos de vn polygono son proporcionales a los triangulos del otro polygono, siendo los del vno los antecedentes, y los del otro los consequentes; pero (f) como vn antecedente a vn consequente, assi todos (e) 19. P. 6. (f) 12. P. 5.

 los

los antecedentes juntos a todos los consequentes juntos: luego como vn triangulo a otro, assi es el polygono al polygono: luego los triangulos son homologos a los polygonos.

Digolo tercero, que el polygono al polygono tiene duplicada la razon de los lados homologos. Porque como el triangulo ABC al triangulo FGH, assi es el polygono ABCDE al polygono FGHIK, como està demostrado; pero (g) el triangulo ABC al triangulo FGH tiene duplicada la razon de los lados homologos AB, FG: luego tambien los polygonos tienen duplicada la razon de los lados homologos AB, FG: luego semejantes polygonos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(g) 19. P. 6.

Otra demonstracion.

Fig. 28. *En el vno de los polygonos tomese qualquier punto como L, y tirense a todos sus angulos las lineas rectas LA, LB, LC, LD, LE, y a vn triangulo como al ALB; formese en el otro polygono sobre el lado homologo FG el triãgulo FMG equiangulo, y tirense a los demás angulos las rectas MH, MI, MK, y quedaràn los polygonos divididos en triangulos en igual numero: y porque (a) los triangulos ABL, FGM son semejantes, serà como LB a AB, assi MG a FG; pero como AB a BC, assi es por la suposicion FG a GH: luego por la igualdad es como LB a BC, assi MG a GH, y los angulos LBC, MGH son iguales (porque el ABC es igual* al

(a) 4. P. 6.

al FGH, y el ABL al FGM:) luego (b) los triangulos LBC, MGH son semejantes; de la misma manera se demuestra, que de los demás triangulos cada vno del vn polygono es semejante a cada vno del otro polygono; pero los triangulos semejantes tienen (c) duplicada la razon de los lados homologos de AB a FG, ò de BC a GH, &c. que todas son (d) vna misma razon duplicada: luego como vn triangulo del vn polygono a vn triangulo del otro polygono, assi (e) todos juntos a todos juntos, esto es assi el polygono al polygono, que es lo que, &c. (b) 6. p. 6. (c) 19. p. 6. (d) 34. p. 5. (e) 12. p. 5.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que dadas tres rectas proporcionales, serà como la primera a la tercera, assi el polygono descripto sobre la primera, al polygono semejante descripto sobre la segunda.

THEOREMA 15. PROPOSICION 21.

Los rectilineos que son semejantes a vn mismo rectilineo, son tambien semejantes entre si.

Sean los rectilineos ABC, DEF semejantes al rectilineo GHI: digo, que son semejantes entre si. Porque por la semejança los angulos del rectilineo ABC han de ser iguales a los angulos del rectilineo GHI. Assimismo los angulos del rectilineo DEF hã de ser iguales a los del rectilineo GHI: luego (a) los angulos del rectilineo ABC son iguales a los angulos del rectilineo DEF: itẽ por la semejãça (b) de los rectilineos, los lados del rectilineo ABC son Fig. 29. (a) 1. ax. 1. (b) 1. def. 6.

propor-

cionales a los lados del rectilineo *GHI* cerca de iguales angulos; y por la misma semejança los lados del rectilineo DE*F* cerca de angulos iguales, son proporcionales a los lados del rectilineo *GHI*:

(c) 11. p. 5. luego (c) los lados del rectilineo ABC son tambien proporcionales a los lados del rectilineo *DEF*

(d) 1. def. 6. cerca de angulos iguales: luego (d) los rectilineos ABC, DE*F* son semejantes, que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 16. PROPOSICION 22.

Los rectilineos semejantes, y semejantemente descriptos sobre quatro rectas proporcionales; lo seràn entre si; y si rectilineos semejantes, y semejantemente descriptos fueren proporcionales, tambien las rectas sobre que estàn descriptos lo seràn.

Fig. 30. Sean lo primero las quatro rectas *AB*, *CD*, *EF*, *GH* proporcionales, como la AB a la CD, assi là *EF* a la *GH*, y sobre las AB, y CD describanse dos rectilineos semejantes como ABI, CDK, y sobre E*F*, *GH* otros qualesquiera semejantes, como EM, GO: digo, que los dichos rectilineos son proporcionales, como el ABI al CDK, assi el EM al GO.

(a) 11. p. 6. Busquese (a) a las dos rectas AB, y CD la tercera proporcional P, y a las otras dos *EF*, y *GH* la Q,

(b) 22. p. 5. y serà (b) por la igualdad de razon como la AB a la P, assi la *EF* a la Q; pero como la AB a la P, assi

es

es el rectilineo *ABI* al rectilineo CDK (c) y como la *EF* a la Q, assi es el rectilineo EM al rectilineo GO: luego (d) es como el rectilineo *ABI* al CDK, assi el EM al GO. (c) Cor. 19. 20. p. 6. (d) 11. p. 5.

Sea lo segundo como el rectilineo *ABI* al *CDK*, assi el EM al GO: digo, que las rectas *AB*, *CD*, *EF*, *GH* son proporcionales: busquese (e) a las tres rectas *AB*, *CD*, *EF* la quarta proporcional RS, sobre la qual describase el rectilineo RV semejante al rectilineo EM, y por esso (f) al rectilineo GO. Y por quanto es como la *AB* a la *CD*, assi la *EF* a la RS serà tambien como *ABI* al *CDK*, assi EM al RV, como està demostrado; pero como *ABI* al *CDK*, assi se supone EM al GO: luego (d) es como EM al RV, assi el mismo EM al GO: luego (g) los rectilineos RV, *GO* son iguales, pero tambien son semejantes: luego las rectas RS, y *GH* son iguales (como se demostrarà en el Lemma siguiente:) luego es (h) como la *EF* a la RS, assi la misma *EF* a la *GH*; pero como la *EF* a la RS, assi se supone la *AB* a *CD*: luego (d) tambien es como la *AB* a la *CD*, assi la *EF* a la *GH*: luego los rectilineos, &c. que es lo que se avia de demostrar. (e) 12. p. 6. (f) 21. p. 6. (g) 9. p. 5. (h) 7. p. 5.

L E M M A.

Demuestrase, que rectilineos iguales, y semejantes, estàn sobre rectas iguales.

A

(i) 11. P. 6. *A las dos rectas GH, RS busquese (i) la tercera proporcional X; y si la linea GH no es igual a la RS, sea la GH mayor: y por quanto es como la GH a la RS, assi RS a la X, y la GH es mayor que la RS, serà la RS mayor que la X: luego la GH es mucho mayor que la X; pero como la GH a la X, assi es (k) el rectilineo GH al rectilineo RV:* (k) Cor. 19. y 20. P. 6. *luego el GH serà mayor que RU, lo que es contra lo supuesto: luego la GH no puede ser mayor que la RS, ni tampoco menor por la misma razon: luego son iguales: luego rectilineos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar.*

N O T A.

El Problema siguiente es de Don Antonio Hugo, que por su grande utilidad se pone aqui; porque con este, y con el puesto en el Scholio de la Prop. 17. resuelve todos los Problemas planos, que son los que no necessitan de dos medias para su resolucion.

P R O B L E M A.

Hallar dos quadrados reciprocos a otros dos dados, cuya suma, ò diferencia sea conocida.

Fig. 22. *Lo primero sea el quadrado de la AB la suma de los dos quadrados que se buscan reciprocos a los quadrados dados de las MC, CQ, ò al quadrado de la CD, que sea medio proporcional entre los dos dados de las MC, CQ: A las dos* rec-

rectas dadas AB, CD busquese (a) la tercera proporcional (a)
BG, y pongase perpendicular a la AB en qualquier extremo 11. P. 6.
como B: partase la AB en dos partes AX, XB reciprocas
a la BG, ò a su igual FX por el problem. del Schol. 17. *P.*
6. *tirense las AF, FB: digo, que los quadrados de las AF,* (b)
FB [cuya suma es el quadrado (b) de la AB] *son* 47.
reciprocos al quadrado de la CD, ò à los quadrados de las
MC, CQ. Porque las AB, CD, BG, ò su igual FX son
proporcionales por la construccion: luego (c) el quadrado de (c) 17. P. 6.
la CD es igual al rectangulo de las AB, FX; pero en los (d)
triangulos AFB, AFX semejantes (d) como AB a FB, 8. P. 6.
assi AF a FX: luego (e) el rectangulo de las medias AF, (e) 16. P. 6.
FB es igual al rectangulo de las extremas AB, FX, ò al
quadrado de la CD su igual, como està demostrado, ò al rec-
tangulo de las MC, CQ por la suposicion: siendo pues el qua-
drado de la CD igual al rectangulo de las AF, FB: luego es
(c) *como la CD a la AF, assi la FB a la CD: luego tam-* (f)
bien es (f) como el quadrado de la CD al de la AF, assi el 22. P. 6.
quadrado de la FB al de la CD. Assimismo siendo el de
las AF, FB igual al rectangulo de las MC, CQ, como està
demostrado: luego (e) es como la MC a la AF, assi la FB
a la CQ: luego los quadrados dellas (f) tambien son propor-
cionales, y los de las AF, FB son reciprocos a los de las
MC, CQ.

Nota *assi en esta parte del presente Problema, como en la primera parte del Problema en el Scholio* 17. P. 6. *que la media proporcional* CD, *ò su igual* BG *entre las* MC, CQ *no ha de ser mayor que la mitad de la recta dada* AB; *porque si fuere mayor, el Problema en tal caso serà impossible.*

Fig. 31. *Lo segundo sea el quadrado de la AB la diferencia entre los dos quadrados que se buscan. A las dos rectas AB, CD, busquese la tercera proporcional AS, y pongase perpendicular à la AB en qualquier extremo como A, y por el Problem. en el Schol. 17. P. 6. busquense dos rectas XB, XA (cuya diferencia es la recta AB,) reciprocas à la AS; dividase la XB por medio en el punto R, y dèl con la distancia XR, ò RB describase el semicirculo XQB, que cortarà la AS en el punto Q, y tirense las rectas XQ, QB: digo, que los quadrados de las BQ, AQ* [cuya diferencia (g) es el quadrado de la AB] *son reciprocos al quadrado de la*
(g) 47. P. 1. *CD, ò a los quadrados de las MC, CQ. Porque las rectas XB, AS, XA son proporcionales por la construccion, y las*
(h) 2. Cor. 8. P. 6. *XB, XQ, XA (h) tambien son proporcionales: luego las rectas AS, y XQ son iguales, por ser sus quadrados iguales*
(i) 17. P. 6. *(i) al rectangulo de las XB, XA. Y por quanto las rectas AB, CD, AS, ò su igual XQ son proporcionales por la construccion: luego el quadrado de la CD (i) es igual al rectangulo de las AB, XQ; pero en los triangulos AQB, XQA (k)*
(k) 8. P. 6. *tambien las AB, BQ, AQ, XQ son proporcionales: luego*
(l) 16. P. 6. *(l) el rectangulo de las BQ, AQ es igual al rectangulo de las AB, XQ, ò al quadrado de la CD su igual, ò al rectangulo de las MC, CQ: luego es (i) como CD a BQ, assi AQ a CD; y tambien (l) como MC a BQ, assi AQ a CQ: luego*
(m) 22. P. 6. *(m) los quadrados destas proporcionales tambien son proporcionales: luego los quadrados de las BQ, AQ son reciprocos al quadrado de la CD, y a los quadrados de las MC, CQ que es lo que se avia de hazer.*

THEOREMA 17. PROPOSICION 23.

Paralelogrammos equiangulos tienen entre si la razon compuesta de sus lados.

Sean los paralelogrammos equiangulos AC, y CF, que tengan los angulos BCD, ECG iguales: digo, que tienen entre si la razon compuesta de las dos razones, que tienen los dos lados del vno a los dos del otro cerca de iguales angulos, de suerte, que los antecedentes estèn en el vno, y los consequentes en el otro, esto es, que si se toman las tres rectas I, K, L, la I a la K, como el lado BC del vno al lado CG del otro, y la K a la L, como el lado DC del primero al lado CE del segundo, serà el paralelogrammo AC al paralelogrammo CF, como la linea I a la L. Juntense los paralelogrammos por el angulo igual de suerte, que la BC, y CG compongan vna linea recta, y las DC, y CE compondràn otra recta, como queda demostrado en la 14. P. 6. alarguense los lados AD, FG hasta que concurran en el punto H: y porque es como la basis BC a la CG, assi (a) el paralelogrammo AC al CH, y como la BC a la CG, assi la I a la K por la construccion: luego (b) tambien es como la I a la K, assi el paralelogrammo AC al CH. Assimismo como la DC a la CE, ò por la construccion, como la K a la L, assi es el paralelogrammo CH al CF.

Fig. 32.

(a) 1. P. 6.

(b) 11. P. 5.

 Avien-

Aviendo pues tres cantidades de vna parte, conviene assaber las rectas I, K, L, y otras tres de la otra, conviene a saber los paralelogrammos AC, CH, CF, que estan en la proporcion ordenada: luego
(c) (c) por la igualdad de razon es como la I a la L, assi
22. p. 5. (d) el paralelogrammo AC al CF; pero la proporcion
5. def. 6. de la I a la L (d) se compone de las dos proporciones de I a K, y de K a L, ò de los lados de BC a CG, y de DC à CE: luego la proporcion del paralelogrammo AC al paralelogrammo CF es la compuesta de las proporciones de los lados BC à CG, y de DC a CE, que es lo que se avia de demostrar.

Otra demonstracion.

Juntense los dos paralelogrammos como arriba,
(e) y porque es (e) como el paralelogrammo AC al
1. p. 6. CH, assi la basis BC à la CG, y como el CH al CF, assi la basis DC a la CE, y (d) la proporcion del AC al CF se compone de las intermedias proporciones de AC a CH, y de CH a CF: luego tambien la proporcion de AC a CF se compone de las proporciones de BC a CG, y de DC a CE, que es lo que se avia de demostrar.

NOTA.

Si se saben los lados de los paralelogrammos en nu-

nũmeros, se sabrà tambien su proporcion en numeros, segun se dixo en la 5. definicion.

De la misma manera los triangulos que tienen vn angulo igual a vn angulo, tienen la razon compuesta de las razones de los lados que comprehenden angulos iguales; porque si se cumplen a paralelogrammos, tendràn estos la razon compuesta de dichos lados, como queda demostrado; pero los triangulos son sus mitades: luego (f) tienen la misma razon compuesta. (f) 15. P. 5.

THEOREMA 18. PROPOSICION 24.

En qualquier paralelogrammo los paralelogrammos que corta el diametro son semejantes al todo, y entre si.

En el paralelogrammo BD corte el diametro AC a los paralelogrammos GE, FH: digo lo primero, que estos son semejantes entre si. Porque el angulo GAE es comun a los paralelogrammos BD, y GE, y el (a) AGI igual a su interno, y opuesto ABC, y los opuestos (b) iguales a los dichos iguales: luego el paralelogramo GE es equiangulo al BD. Por la misma razon el FH es equiangulo al mismo BD. Y porque el triangulo AGI es equiangulo al triangulo ABC, y el AEI al ADC; luego (c) es como AB a BC, assi AG a GI: luego cerca de los angulos iguales B, y G tienen lados proporcionales. Además como BC a CA, assi GI a IA, y como

Fig. 33.

(a) 29. P. 1.

(b) 34. P. 1.

(c) 4. P. 6.

(d) mo CA a CD, assi IA a IE: luego (d) por la igual-
22. P. 5. dad de razon es como BC a CD, assi GI a IE: luego cerca de los angulos iguales BCD, GIE tienen lados proporcionales. Por la misma razon se demuestra, que los paralelogrammos GE, y BC cerca de los demàs angulos iguales tienen lados proporcionales: luego (e) son semejantes. Lo mismo se demuestra del paralelogrammo FH. Digo lo segundo, que los paralelogrammos GE, FH son semejantes (f) entre si, porque estàn demostrados semejantes al paralelogrammo BD: luego en qualquier, &c. que es lo què se avia de demostrar.

(e) 1. def. 6.

(f) 21. P. 6.

PROBLEMA 7. PROPOSICION 25.

Formar vn rectilineo semejante, y semejantemente puesto a vn rectilineo, y igual a otro, dados.

Sean los dos rectilineos dados A, y B, se ha de
Fig. 34 formar vn rectilineo semejante al A, y igual al B: sobre el lado CD (a) formese el paralelogrammo CE igual al rectilineo A en qualquier angulo, y sobre la recta DE en el angulo EDG igual al angulo DCF; formese (b) el paralelogrammo DH igual al rectilineo B, y serà la linea CDG vna recta, y tambien la FEH, como se demostrò en la 45. P. 1. Entre las rectas *CD*, DG (c) busquese la media proporcional IK, y sobre ella formese (d) el rectilineo L semejante al rectilineo A: digo, que L es igual al rectilineo B. Porque por ser las lineas *CD*, IK, DG con-

(a) 45. P. 1.

(b) 44. P. 1.

(c) 13. P. 6.

(d) 18. P. 6.

continuas proporcionales, serà (c) como la primera *CD* a la tercera DG, assi el rectilineo A de la primera al rectilineo L semejante de la segunda IK; pero (f) como la basis CD a la DG, assi es el paralelogrammo *CE* al DH: luego (g) es como *CE* al DH, assi A a L; pero como *CE* a DH, assi es A a B, por ser el A igual al *CE*, y el DH al B por la construccion: luego (g) es como A a B, assi el mismo A a L: luego (h) el B es igual al L; pero el L es semejante al A: luego se ha formado, &c. que es lo que se avia de hazer.

(c) *Cor.* 19. ó 20. *P.* 6.

(f) 1. *P.* 6.

(g) 11. *P.* 5.

(h) 9. *P.* 5.

THEOREMA 19. *PROPOSICION* 26.

Los paralelogrammos semejantes, que tienen vn angulo comun, los corta vn mismo diametro.

Sea el paralelogrammo EG semejante al paralelogrammo BD en el angulo comun EAG: digo, que el diametro AC del BD tambien es diametro del EG: tirense las rectas AF, CF, las quales si componẽ vna linea recta, serà la recta AFC diametro comun de entrambos paralelogrammos, porque la AF es diametro del EG, y la AC del BD; y si las AF, y CF no componen vna linea recta, tirese si puede ser en el paralelogrammo BD otro diametro como AHC, que corte el lado EF en el punto H, y por èl tirese la HI (a) paralela a la FG; y porque a los paralelogrammos BD, EI corta el diametro comun AHC, seràn [b] semejantes, y semejantemente puestos: luego es [c] como la BA a la AD, assi la

Fig. 35.

(a) 31. *P.* 1.

(b) 24. *P.* 6.

(c) 1. *def.* 6.

la EA a la AI; pero como la BA a la AD, assi es tambien la misma EA a la AG (porque los paralelogrammos BD, EG se suponen semejantes:) luego la EA a la AI (d) y a la AG tiene la misma pro-
(d) 11, P. 5. porcion: luego la AI (e) es igual a la AG, la parte
(e) 9. P. 5. a su todo, lo que no puede ser: luego las AF, y FC componen vna linea recta, que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 10. PROPOSICION 27.

De todos los paralelogrammos aplicados a vna misma recta, y deficientes en figuras paralelogrammas semejantes, y semejantemente puestas, es el mayor el que se aplicare a la mitad.

Fig. 36. Sobre la recta dada AB estèn aplicados los dos paralelogrammos CH, XY deficientes en los paralelogrammos BD, BZ semejantes, y semejantemẽte puestos: digo, que el paralelogrammo CH aplicado a la mitad AC de la recta dada AB, es el mayor de los paralelogrammos aplicados a la misma AB, y deficientes con figuras paralelogrammas semejantes al defecto BD. Describase el semicirculo AMFB, y de los puntos C, X levantense las perpendiculares CF, XM; y si el paralelogrammo CH no es el mayor, sea si puede ser mayor el paralelogrammo XY: luego (a) la razon de AX a AC es ma-
(a) Schol. 16 P. 6. yor que la de AH a AY; pero por la semejança de los

los paralelogrammos BD, BZ, la razon de AH a AY, ò de CD a XZ, es la misma (b) que de CB, ò de su igual AC a XB: luego (c) el rectangulo AXB contenido de las extremas AX, XB, ò el quadrado de la (d) XM es mayor que el quadrado de la AC, ò de su igual CF: luego la MX serà mayor que el semidiametro CF, lo que no puede (e) ser: luego de todos los paralelogrammos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(b) 1. def. 6.
(c) Schol. 16 p. 6.
(d) 17 p. 6.
(e) 15. p. 3.

Otra demonstracion.

Por quanto el semidiametro AC es mayor que la recta XM, serà el quadrado de la AC mayor que el de la XM, ò que el rectangulo AXB su igual: luego (c) la razon de AC a AX es mayor que la de XB a AC; pero por la semejança de los paralelogrammos BD, BZ, la razon de XB a BC igual a la AC, es la misma que de XZ a CD, esto es de AY a CD: luego la razon de AC a AX es mayor que la de AY a CD: luego (c) el paralelogrammo contenido de las extremas AC, CD es mayor que el paralelogrammo equiangulo contenido de las medias AX, AY, que es lo que se avia de demostrar.

La demonstracion desta Proposicion, y de las dos siguientes se deduce de la analysis de Don Antonio Hugo.

PROBLEMA 8. PROPOSICION 28.

Sobre vna recta dada aplicar vn paralelogrammo igual a vn rectilineo dado, y deficiente con vn paralelogrammo semejante a vn paralelogrammo dado.

Fig. 37. Sobre la recta dada AB se ha de aplicar vn paralelogrammo igual al rectilineo dado Q, y deficiente con vn paralelogrammo semejante al paralelogrammo dado HL. Sobre la recta CD igual a la GL
(a) [*altura del paralelogrammo dado HGL*] y en el angu-
45. P. 1. lo DCF, igual al angulo HGL, hagase (a) el para-
(b) lelogrammo DF, igual al rectilineo dado Q, y en-
13. P. 6. tre las HG, CF busquese (b) la media proporcional AV, que sea perpendicular a la AB, y a la AV la XM igual, y paralela en el semicirculo descripto
(c) sobre la AB, y hagase (c) como la HG a la LG, assi
12. P. 6. la BX a la XZ en el angulo BXZ igual al angulo HGL, y cumplase el paralelogrammo BY: digo, que el paralelogrammo XY es igual al rectilineo dado Q, aplicado a la recta AB, y deficiente con el paralelogrammo BZ semejante al paralelogrammo dado HL. Porque las rectas HG, GL, BX, XZ son proporcionales por la construccion, y compre-
(d) henden iguales angulos HGL, BXZ: luego (d) los
1. def. 6. (e) paralelogrammos HL, y BZ son semejantes; pero
11. P. 5. tambien las (e) HG, XB, AX, CF son proporcio-

na-

nales por la construccion [*por ser la XM, ò su igual AV media proporcional, assi entre las HG, CF, como entre las AX, XB:*] luego (e) tambien son proporcionales, como CD, ò su igual GL a la AY, ò su igual XZ, assi la AX a la CF, por ser entrambas razones, iguales a la razon de HG a XB: luego (f) el paralelogrammo XY es igual al paralelogrammo DF, ò al rectilineo dado Q, &c. que es lo que se avia de hazer. (e) 11. P. 5. (f) 14. P. 6.

Pero el rectilineo dado Q no ha de ser mayor, que el paralelogrammo que se aplicare a la mitad de la recta AB, y tuviere semejante defecto al paralelogrammo HL; porque (g) este es el mayor de los que se pueden aplicar a la recta AB, y tuvieren semejantes defectos: y esta limitacion manifiesta la construccion; porque si la XM fuesse mayor que la mitad de la AB, el problema no pudiera construirse. (g) 27. P. 6.

Si en lugar del rectilineo dado Q se diesse el paralelogrammo DF, a quien juntamente se pidiesse semejante el defecto BZ, se tomarà la AV igual a la CD, y la XM igual a la AV, y se haràn proporcionales CD, CF, XB, AY, y en el angulo A igual al angulo C se cumplirà el paralelogrammo BY, se tirarà la XZ paralela a la AY, y quedarà XY igual al DF, &c. Porque es como XB a XM, ò a CD su igual, assi la CD a la AX, por la construccion, y tambien como la CD a la CF,

 assi

assi la XB a la XZ, ó a la AY su igual: luego tam-
(h) 11, l. 5. bien es (h) como la AX a la CD, assi la CF a la AY
(i) 14. l. 6. [*siendo entrambas razones las mismas que la de CD a BX:*] luego (i) el paralelogrammo XY es igual al paralelogrammo DF deficiente con el paralelogrammo BZ semejante al DF.

S C H O L I O.

De aqui se sigue, que la AB en este caso se ha de cortar en las partes AX, XB reciprocas a la CD; y si el paralelogrammo DF fuere quadrado, podrà servir el Problema para las igualaciones algebricas, quando vn rectangulo [de quien vn lado es conocido, y otro no conocido] *menos vn quadrado* [cuyo lado es el mismo que el no conocido del rectangulo] *es igual a vn quadrado conocido, como ax--xx igual a bb.*

PROBLEMA 9. PROPOSICION 29.

Sobre vna recta dada aplicar vn paralelogrammo igual a vn rectilineo dado, y excedente con vn paralelogrammo semejante a vn paralelogrammo dado.

Fig. 38. Sea dada la recta AB, sobre la qual se ha de aplicar vn paralelogrammo igual al rectilineo dado Q, y excedente con vn paralelogrammo semejante al paralelogrammo dado LH. Sobre la recta CD igual a la GL en el angulo C igual al angulo G ha-

gase

gase (a) el paralelogrammo DF igual al rectilineo Q, y entre las HG, CF tomese (b) la media proporcional AV perpendicular a la AB, y partase la AB por medio en el punto R, tirese la RV, y del punto R con la distancia RV describase el semicirculo XVS, y será (b) la AV media proporcional entre las XA, XB, ò su igual AS: hagase tambien (c) como la HG a la GL, assi la XA a la XY, y cumplase el paralelogrammo BY en el angulo X igual al angulo G, y tirese la AZ paralela a la XY: digo, que el paralelogrammo BY es igual al rectilineo dado Q, aplicado a la recta AB, y excedente con el paralelogrammo AY semejante al paralelogrammo dado HL. Porque las HG, GL, ò su igual CD, XA, XY, ò su igual AZ son proporcionales, y el angulo X igual al angulo G: luego (d) los paralelogrammos AY, HL son semejantes; pero tambien son proporcionales las HG, XA, XB, CF [*porque la AV es media proporcional, assi entre las extremas HG, CF por la construccion, como entre las medias XA, XB:*] luego (e) tambiẽ son proporcionales las GL, ò CD, XY, XB, CF, por ser entrambas razones las mismas que la de HG a XA: luego (f) los paralelogrammos BY, DF, ò su igual el rectilineo Q son iguales entre si, &c. que es lo que se avia de hazer.

(a) 45. P. 1.
(b) 13. P. 6.
(c) 12. P. 6.
(d) 1. def. 6.
(e) 11. P. 5.
(f) 14. P. 6.

Si el rectilineo dado fuesse el paralelogrammo DF, excedente con el AY semejante al mismo DF, hu-

huvieran de buscarse dos partes AX, XB reciprocas a la CD; y la AV igual a la misma CD. Y si DF fuesse vn quadrado, podrà servir el problema para las igualaciones algebricas; quando vn rectangulo [*de quien vn lado es conocido, y otro no conocido;*] mas vn quadrado [*cuyo lado es el mismo que el no conocido del rectangulo:*] es igual a vn quadrado conocido, como quando $ax+xx$ es igual a bb.

PROBLEMA 10. PROPOSICION 30.

Cortar vna recta dada segun la extrema, y media razon.

Fig.2. Sea la recta dada AB, que se ha de cortar segun la extrema, y media razon. Cortese (a) la recta AB en el punto C de suerte, que el rectangulo contenido de la entera AB, y del segmento CB sea igual al quadrado del otro segmento AC: digo, que la linea AB està cortada en el punto C, segun la extrema, y media razon. Porque ay tres lineas rectas AB, AC, CB, y el rectangulo de las extremas es igual al quadrado de la media: luego es (b) como la AB a la AC, assi la AC a la CB: luego (c) la linea AB està cortada en el punto C, segun la extrema, y media razon, que es lo que se avia de hazer.

(a) 11. l. 2.

(b) 17. p. 6.

(c) 3. def. 6.

THEO-

THEOREMA 21. PROPOSICION 31.

Si de los lados de vn triangulo rectangulo se describen qualesquiera figuras semejantes, la que se describe del lado opuesto al angulo recto, es igual a las otras dos juntas.

Sea el triangulo rectangulo ABC, y su angulo BAC recto, describanse de sus lados qualesquiera figuras semejantes BD, AF, AI: digo, que la figura BD es igual a las dos AF, AI juntas. Del angulo recto A tirese (a) la AK perpendicular a la BC, y será (b) como la linea BC a la CA assi la CA a la CK; luego es (c) como la primera linea BC a la tercera CK, assi la figura BD de la primera a la figura AI semejante de la segunda, y invirtiendo como la linea CK a la BC, assi la figura AI a la figura semejante BD. Por la misma razon las tres lineas BC, BA, BK son continuas proporcionales; y es como la primera BC a la tercera BK, assi la figura BD de la primera a la figura semejante AF de la segunda, y invirtiendo, como la BK a la BC, assi la figura AF a la BD. Y por quanto es como la primera CK a la segunda BC, assi la tercera AI a la quarta BD, y como la quinta BK a la segunda BC, assi la sexta AF a la quarta BD: luego es (d) como la primera CK con la quinta BK a la segunda BC, assi la tercera AI con la sexta AF a la quarta BD; pero

Fig. 39.

(a) 12. 1. E.

(b) 2. Cor. 8. P. 6.

(c) Cor. 20. P. 6.

(d) 24. P. 5.

pero la primera CK con la quinta BK son iguales a la segunda BC: luego tambien la tercera AI con la sexta AF son iguales a la quarta BD.

Otro modo.

Como el quadrado de la linea AC al quadrado
(e) de la BC, assi es (e) qualquier figura de la AC a su
19. o 20. P. 6. semejante de la BC; y como el quadrado de la linea AB al quadrado de la BC, assi es qualquiera otra figura de la AB a la figura semejante de la BC: luego
(f) es (f) como los quadrados de las AC, y AB juntos
24. P. 5. al quadrado de la BC, assi qualesquiera otras figuras semejantes juntas de las lineas AC, y AB a la figura semejante de la linea BC; pero los quadrados
(g) (g) de las lineas AC, y AB son iguales al quadra-
47. P. 1. do de la linea BC: luego tambien qualesquier otras figuras semejantes de las AC, y AB son iguales a la figura semejante de la linea BC: luego si de los lados, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 23. PROPOSICION 32.

Si dos triangulos que tienen dos lados proporcionales a dos lados, se componen segun vn angulo, quedando paralelos los lados proporcionales, los demàs lados de los triangulos compondràn vna linea recta.

Fig. 40. Los triangulos ABC, DCE tengan los lados AB,

AB, AC proporcionales a los lados DC, DE, y componganse segun el angulo C de suerte, que los lados homologos AB, DC, y tambien AC, DE sean paralelos entre si: digo, que los lados BC, y CE componen vna linea recta. Porque por ser las lineas AB, DC paralelas, serà (a) el angulo A igual a su alterno ACD: por la misma razon serà el angulo D igual a su alterno ACD: luego los angulos A, y D son iguales; y porque los triangulos ABC, DCE cerca de iguales angulos A, y D tienen lados proporcionales, seràn (b) equiangulos, y el angulo B serà igual al angulo DCE, y el angulo A està demostrado igual al angulo ACD: luego los dos angulos A, y B juntos son iguales a los ACD, y DCE, ò al angulo ACE: añadase a entrambas partes el angulo ACB, y quedaràn los tres angulos del triangulo ABC iguales a los dos ACE, y ACB; pero (c) los tres angulos del triangulo ABC son iguales a dos rectos: luego los dos ACE, y ACB son tambien iguales a dos rectos: luego (d) las lineas BC, y CE componen vna recta: luego si dos triangulos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(a) 29. P. 1.

(b) 6. P. 6.

(c) 32. P. 1.

(d) 14. P. 1.

THEOREMA 23. PROPOSICION 33.

En circulos iguales, los angulos assi en el centro, como en la circumferencia, tienen la misma proporcion que las circumferencias sobre quienes insisten, y la misma tienen los sectores.

Fig. 41. De los circulos iguales ABC, EFG sean los centros D, H tomense qualesquiera arcos BC, FG sobre quienes insistan los angulos BDC, FHG en los centros, y los BAC, FEG en la circumferencia: digo, que es como el arco BC al arco FG, assi el angulo BDC al angulo FHG, y el BAC al FEG, y el
(a) sector BDC al sector FHG: tirense las rectas BC,
1.P.4. FG, y en el circulo BAC acomodense (a) qualesquiera lineas iguales a la BC, como la CI, &c. y en el FEG acomodense otras iguales a la FG, como
(b) las GK, KL, &c. tirense las rectas DI, HK, HL. Y
28.P.3. porque las lineas BC, CI son iguales, los arcos (b)
(c) BC, CI tambien son iguales, y (c) el angulo BDC
27.P.3. es igual al angulo CDI. Por la misma razon los arcos FG, GK, KL son iguales, y los angulos FHG, GHK, KHL tambien son iguales: luego el arco BCI es igualmente multiplice del arco BC, como el angulo BDI del angulo BDC, y el arco FGKL es igualmente multiplice del arco FG, como el angulo FHL del angulo FHG; pero quando el arco BCI
(d) es igual al arco FGKL, el angulo (d) BDI es igual
27.P.3. al angulo FHL, y si el arco BCI es mayor que el FGKL, el angulo BDI es mayor que el FHL; y si menor, menor. Aviendo pues quatro cantidades, la primera el arco BC, la segunda el arco FG, la tercera el angulo BDC, la quarta el angulo FHG; y siendo los igualmente multiplices el arco BCI, y el angulo BDI de la primera, y tercera, igualmente meno-

menores, ò iguales, ò mayores que los igualmente multiplices, el arco FGKL, y el angulo FHL de la segunda, y de la quarta: luego es (d) como el arco *B*C al arco FG, assi el angulo *B*DC al angulo FHG. Pero (e) como el angulo *B*DC al angulo FHG, assi es el angulo *B*AC al angulo *FEG* por ser mitades de los primeros: luego es (f) como el arco *B*C al arco *FG*, assi el angulo *B*AC al angulo *FEG*. (d) 6. def. 5. (e) 15. P. 5. (f) 11. P. 5.

Digo lo mismo de los sectores BDC, *FHG*. Porque en los segmentos BC, CI, los angulos BMC, CNI son iguales, porque insisten sobre iguales (g) arcos BAC, *CBAI*: luego los segmentos *B*MC, CN*I* (h) son semejantes, y iguales, por estar sobre iguales rectas *BC*, *CI*: añadanse a entrambas partes los triangulos *BDC*, *CDI* (i) que son iguales, y quedaràn los sectores *BDC*, *CDI* iguales: luego el sector *BDI* es igualmente multiplice del sector *BDC*, como el arco *BCI* del arco *B*C. De la misma suerte se demuestra, que el sector *F*HL es igualmente multiplice del sector *FHG*, como el arco *FG*KL del arco *FG*; pero si el arco *BCI* es menor que el arco *FG*KL, el sector *BDI* es menor que el sector *FH*L, y si igual, igual, si mayor, mayor: luego (k) es como el arco BC al arco *FG*, assi el sector BDC al sector *FHG*: luego en circulos iguales, &c. que es lo que se avia de demostrar. (g) 27. P. 3. (h) 24. P. 3. (i) 4. P. 1. (k) 6. def. 5.

COROLARIOS.

1 De aqui se sigue, que el sector al sector tiene la misma proporcion que el angulo al angulo, porque entrambas son la misma que tiene el arco al arco.

2. Siguese lo segundo, que como el angulo en el centro a quatro rectos, assi es el arco correspondiente al dicho angulo, a toda la circumferencia, y al contrario.

FIN DEL LIBRO SEXTO.



LIBRO ONZENO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES.



Os libros septimo, octavo, noveno, y dezimo de los Elementos de Euclides; no son necessarios a las mas de las ciencias Mathematicas; y assi es digno de admiracion, que todos los Comentadores antiguos los ayan colocado en el numero, y orden de los Elementos; porque los tres primeros casi solamente contienen la aplicacion de las proposiciones del libro quinto a la cantidad discreta, y el dezimo el empleo de vna laboriosa curiosidad de las cantidades incommensurables. Por esta causa, y porque los mas de los Comentadores modernos los omiten, tambien nosotros los dexamos, passando desde luego a los libros onzeno, y dozeno, que comprehenden la doctrina de los solidos, que es la mas vtil, y necessaria a todas las partes de la Mathematica. En la explicacion, y demonstraciones del libro dozeno seguirèmos casi enteramente al P. Andres Tacquet de la Compañia de Jesus, insigne professor de las Mathematicas en los Payses

baxos,

baxos, aunque añadimos de nuestro estudio algunas proposiciones, y Scholios de tanta vtilidad, como podrà calificar el docto que quisiere hazer examen de su vniversalidad, y de lo que en virtud dellos se facilitan muchas de las intrincadas demonstraciones de aquestos libros.

DEFINICIONES.

1 Solido, ò cuerpo se llama vna magnitud, que tiene longitud, latitud, y profundidad.

2 Extremos, ò terminos del solido, son las superficies.

3. Linea recta, ò perpendicular a vn plano se llama la que forma angulos rectos con todas las rectas que toca de dicho plano.

Fig. 1. *Como la linea BA serà perpendicular al plano CC, quando fuere perpendicular a todas las lineas rectas, que en el plano CC la tocan en el punto A, como son las rectas CA.*

4 Vn plano se llama recto, ò perpendicular a otro, quando todas las rectas, que en el vno se tiran perpendiculares a la seccion comun, son perpendiculares al otro plano.

Fig. 2. *Como el plano AB es perpendicular al plano CD, quando todas las rectas FG, HI, &c. en el plano AB tiradas perpendiculares a la seccion comun EB son perpendiculares al plano CD.*

5. Si vna recta no es perpendicular a vn plano, y de su punto mas alto se tira vna perpendicular al

dicho

dicho plano, y en èl ſe juntan los extremos de ambas, el angulo contenido deſta que los junta, y de la linea dada, es la inclinacion de la linea dada ſobre el plano.

Como la inclinacion de la linea AB ſobre el plano CD es el angulo agudo EAB contenido de la AB dada, y de la AE, que junta los extremos A de la linea dada AB, y E de la perpendicular BE. Fig. 3.

6 Inclinacion de vn plano ſobre otro, es el angulo agudo contenido de las rectas, que ſe tiran en entrambos planos a vn miſmo punto, perpendiculares a la ſeccion comun.

Como la inclinacion del plano CD ſobre el plano AB es el angulo agudo GFH comprehendido de las rectas GF, HF, que en el punto F ſon perpendiculares a la ſeccion comun ED, la vna en vn plano, y la otra en otro. Fig. 4.

7. Planos ſemejantemente inclinados ſe llaman aquellos, cuyos angulos de inclinacion ſon entre ſi iguales.

8 Paralelos planos ſon los que extendidos nunca pueden concurrir.

Lineas rectas paralelas ſe dizen las que alargadas hàzia entrambas partes nunca pueden concurrir: de la miſma manera planos paralelos ſe dizen quando alargados hàzia todas las partes nunca pueden concurrir.

9. Semejantes figuras ſolidas ſon las que eſtàn contenidas de ſemejantes planos iguales en numero.

Igua-

10. Iguales, y ſemejantes figuras ſolidas ſon las que eſtàn contenidas de ſemejantes planos, iguales en numero, y en magnitud.

Fig. 5. 11. Angulo ſolido rectilineo es, el que conſta de mas que dos angulos planos, que no eſtàn en vn miſmo plano, y concurren en vn miſmo punto, como el angulo ſolido A, que conſta de los tres angulos planos BAD, DAC, BAC en diſtintos planos.

De aqui ſe ſigue, que iguales angulos ſolidos ſon los que conſtan de angulos planos iguales en numero, y en magnitud, ò quando entrambos ſi ſe penetraſſen convendrian entre ſi, ajuſtandoſe cada angulo plano a ſu igual.

12. Priſma es vna figura ſolida contenida de planos, de quienes dos opueſtos ſon parelelos iguales, y ſemejantes, y los demàs paralelogrammos.

Fig. 15. y 6. *Como las figuras ſiguientes, la primera tiene los dos triangulos opueſtos ABC, DEF paralelos iguales, y ſemejantes, y los otros planos ACFD, ABED, CBEF ſon paralelogrammos: la ſegunda tiene los dos paralelogrammos opueſtos ABCD, FGHE paralelos iguales, y ſemejantes, y los otros planos ABFE, ADHE, CDHG, CBFG ſon paralelogrammos; y aſsi los dos planos opueſtos paralelos iguales, y ſemejantes pueden ſer de qualquier numero de lados.*

13. Paralelepipedo es vn ſolido, que eſtà contenido de ſeis quadrilateros, de quienes los opueſtos ſon paralelos.

Los paralelepipedos ſon vna eſpecie de los priſmas, y ſe diferencian entre ſi, como los paralelogrammos, en paralelepipe-

pipedos rectangulos, quadrilongos, rhombos, rhomboides, la qual denominacion se toma de los paralelogrammos que contienen el solido. De suerte, que si de los seis paralelogrammos dos opuestos son quadrilongos, el paralelepipedo se llamarà quadrilongo, si son rhombos se llamarà rhombo, y si rhomboides el paralelepipedo se llamarà rhomboides.

14. Cubo es vn paralelepipedo, cuyos seis planos son quadrados iguales.

THEOREMA 1. PROPOSICION 1.

De vna linea recta no puede estar vna parte en vn plano, y otra elevada sobre èl.

De la recta AB la parte CB no puede estar elevada sobre el plano DE, estando la parte AC en el dicho plano. Porque si puede ser, alargando la AC en el plano hàzia F, las rectas AB, AF tendràn vn segmento comun AC, lo (a) que no puede ser: luego de vna linea, &c. que es lo se avia de demostrar. Fig. 7. (a) 10. ax. 1.

THEOREMA 2. PROPOSICION 2.

Si dos lineas rectas se cortan, estaràn en vn mismo plano, como todos los triangulos que formaren.

Las rectas AB, CD cortense en el punto E, y en las rectas ED, EB tomense qualesquiera puntos como F, G, tirese la recta FG: digo, que el triangulo EFG, y las rectas AB, CD estàn en vn mismo pla- Fig. 8.

no. Porque si del triangulo EFG alguna parte como EHIG està en vn plano, y otra parte, como FHI en otro plano, tambien de las rectas EF, GF las partes EH, GI estaran en vn plano, y las partes
(b) 1. P. 11. HF, IF elevadas sobre èl, lo que (b) no puede ser: luego el triangulo EFG està en vn plano, y en el mismo estàn sus lados EF, EG: luego tambien (b) las AB, CD estàn en el mismo plano, que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 3. PROPOSICION 3.

Si dos planos se cortan entre si, la seccion comun es vna linea recta.

Fig. 9. Los dos planos AB, CD cortense entre si: digo, que la seccion comun EF es vna recta. Porque si no lo es, en el plano AB tire se (a) la recta EGF, y en
(a) 1. post. 1. el plano CD la recta EHF: luego dos rectas como las EGF, EHF cerraràn vn espacio, lo que (b) no
(b) 14. ax. 1. puede ser: luego si dos planos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 4. PROPOSICION 4.

Si vna linea recta es perpendicular en la seccion comun à dos rectas, serà tambien perpendicular al plano en que estàn las dos rectas.

Fig. 10. Sea la recta BA perpendicular a las dos rectas

CX, FS, que ſe cortan en el punto A: digo, que la recta BA tambien es perpendicular al plano de las rectas CX, FS. Porque ſi no lo es, del punto B cayga qualquier otra recta perpendicular a eſte plano, y ſea la BQ: tireſe la recta AQ, y en el plano FAC a la linea AQ tireſe la perpendicular QO, que alargada cortarà a la vna de las rectas CX, FS, ò a entrambas en qualquier parte que eſtè el punto Q: corte pues la QO a la recta CX en el punto O, tireſe la recta BO; y porque el angulo BAO es recto por la ſupoſicion, el quadrado de la BO (a) es igual a los dos quadrados BA, y AO: pero la BQ ſe dize ſer perpendicular al plano FAC: luego (b) el angulo BQA ſerà recto, y el quadrado de la BA ſerà (a) igual a los dos quadrados BQ, AQ. Y porque el angulo AQO es recto por la conſtruccion, el quadrado de la AO es igual (a) a los dos quadrados OQ, y AQ eſtà demoſtrado, que el quadrado BQ es igual a los dos quadrados BA, y AO, y eſtos dos iguales a los quatro de las BQ, AQ, OQ, AQ: luego (c) el quadrado de la BO tambien es igual a los quatro quadrados de las BQ, OQ, y AQ dos vezes: luego el quadrado de la BO es mayor que los dos de las BQ, y OQ: luego (d) el angulo BQO no es recto: luego (b) la linea BQ no es perpendicular al plano GAF, ſino la linea BA, que es lo que ſe avia de demoſtrar.

(a) 47. p. 1.
(b) 3. def. 11.
(c) 1. ax. 1.
(d) 48. p. 1.

THEOREMA 5. PROPOSICION 5.

Si tres lineas rectas son perpendiculares a vna linea recta en vn mismo punto, todas tres estàn en vn mismo plano,

Fig. 11. Las tres rectas BC, BD, BE sean perpendiculares a la recta AB en el punto B: digo, que las rectas BC, BD, BE estàn en vn mismo plano. Porque si
(a) 2. p. 11. no es assi (a) estèn las BC, BD en el plano FC; y si es possible la BE con la AB en el plano AE, que
(b) 3. p. 11. corta al plano FC (b) en la comun seccion BG. Y por quanto la AB es perpendicular a las dos rectas
(c) 4. p. 11. BC, BD tambien es perpendicular (c) al plano FC
(d) 3. def. 11 que passa por ellas: luego es perpendicular (d) a la recta BG: luego los dos angulos ABE, ABG, que estàn en el plano AG (que passa por las rectas BE, BG) son iguales entre si, la parte a su todo, lo que no puede ser: luego si tres lineas rectas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 6. PROPOSICION 6.

Las lineas rectas perpendiculares a vn mismo plano, son paralelas entre si.

Fig. 12. Sean las rectas AB, CD perpendiculares al plano EF: digo, que son paralelas entre si. Juntense
(a) 3. def. 11 con la recta BD en el plano EF, y seràn (a) los angulos ABD, CDB rectos: y en el plano EF tirese la

recta

recta DG perpendicular a la *BD*, y igual a la *AB*: tirense tambien las rectas *B*G, AG, AD. Y porque en los triangulos *B*AD, *B*DG los dos lados A*B*, GD son iguales, y el *BD* comun, y los angulos A*B*D, GD*B* rectos: luego (b) las bases AD, *B*G son iguales. Y por quanto en los triangulos A*B*G, GDA los dos lados A*B*, *B*G del vno son iguales a los lados GD, DA del otro, y la basis AG comun a entrambos, (c) los angulos A*B*G, GDA son iguales entre si; pero (d) el A*B*G es recto: luego el GDA es recto, y el GDC (d) tambien recto: luego la recta GD es perpendicular a las tres rectas *B*D, AD, CD: luego (e) estas tres estàn en vn mismo plano; pero la A*B* tambien està (f) en vn plano con las rectas *BD*, *AD*: luego las A*B*, y CD estàn en vn mismo plano, y hazen con la *BD* dos angulos internos iguales a dos rectos: luego (g) son paralelas: luego dos lineas, &c.

(b) 4. P. 1.
(c) 8. P. 1.
(d) 3 def. 11
(e) 5. P. 11.
(f) 2. P. 11.
(g) 28. P. 1.

O porque por qualesquiera dos rectas puede passar vn plano, las rectas A*B*, CD estaràn en vn plano; pero la *BD*, que las junta està (h) en el mismo plano con ellas: luego las A*B*, y CD, que con la *BD* en vn mismo plano forman dos angulos *ABD*, *CDB* iguales a dos rectos son paralelas entre si, que es lo que se avia de demostrar.

(h) 2. P. 11.

THEO-

THEOREMA 7. PROPOSICION 7.

La recta que corta a dos paralelas, està con ellas en vn mismo plano.

Fig. 13. Corte la recta EF a las paralelas AB,CD: digo, que està con ellas en vn mismo plano. Porque si està fuera dèl, cortese el plano de las paralelas con otro plano por los puntos E, y F, y sea la seccion
(a) comun EGF, que serà (a) linea recta: luego dos
3. P. 11. rectas EF,EGF cerraràn vn espacio,lo que no puede ser: luego la recta que corta,&c.

Lo mismo se demuestra de qualesquiera otras lineas rectas, aunque no sean paralelas.

THEOREMA 8. PROPOSICION 8.

Si de dos paralelas rectas, la vna es perpendicular a vn plano, lo serà tambien la otra.

Fig. 11. De las dos paralelas AB, CD la AB sea perpendicular al plano EF: digo, que tambien lo es la CD. Tirese la recta BD en el plano EF, y la DG perpendicular a la BD,y igual a la AB:tirense tam-
(a) bien las rectas BG, AG, AD. Y porque la AB es
3. def. 11 recta al plano EF, el angulo ABD (a) es recto; pe-
(b)
29. P. 1 ro los dos angulos ABD, CDB (b) son iguales a dos rectos: luego el CDB es recto. Y por quanto en

en los dos triangulos ABD, GDB los dos lados AB, GD son iguales, y el BD comun, y los angulos ABD, GDB rectos, seràn (c) las bases AD, BG iguales. Ademàs porque en los triangulos ABG, GDA los dos lados AB, BG del vno son iguales a los lados GD, DA del otro [esto es el AB al GD, y el BG al DA,] y la basis AG comun a entrambos: luego (d) los angulos ABG, GDA opuestos a la base son iguales; pero (e) el ABG es recto: luego el GDA tambien es recto, y la recta GD es perpendicular a las dos rectas BD, AD, que se cortan en el punto D: luego la GD (f) es perpendicular al plano de las rectas BD, AD; pero (g) en este plano està tambien la recta CD: luego la recta GD (e) es perpendicular a la recta CD. Y por quanto la CD està demostrada perpendicular a las dos rectas BD, GD, que estàn en el plano EF serà (f) tambien perpendicular al plano EF: luego si de dos paralelas, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(c) 4. P. 1.
(d) 8. P. 1.
(e) 3. def. 11
(f) 4. P. 11.
(g) 7. P. 11.

THEOREMA 9. PROPOSICION 9.

Las rectas paralelas a otra recta, aunque no estèn en vn mismo plano con ella, son paralelas entre si.

Sean las dos rectas AB, CD paralelas a la EF no estando en vn mismo plano con ella: digo, q̄ las AB, CD son paralelas entre si. Tirese la GH perpendicular Fig 14.

cular a la EF en el plano de las AB, EF, y la GL perpendicular a la misma EF en el plano de las CD, EF. Y por que la EG es perpendicular a las
(a) 4. P. 11. HG, GI, que concurren en el punto *G*, será (a) la *EG* perpendicular al plano de las *HG, GI*; pero la
(b) 8, P. 11. AB es paralela a la EF: luego (b) la AB tambien es perpendicular al plano de las *HG, GI*. Por la misma razon la CD es perpendicular al mismo plano de las *HG, GI*: luego las rectas AB, CD que son per-
(c) 6. P. 11. pendiculares a vn mismo plano son (c) paralelas entre si, que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 10. *PROPOSICION* 10.

Si dos lineas rectas que concurren en vn plano, son paralelas a otras dos, que concurren en otro, comprehenden iguales angulos.

Fig. 15. Sean las rectas AB, AC paralelas a las rectas DE, DF en distintos planos: digo, que el angulo BAC es igual al angulo EDF. Cortense las BA, ED iguales entre si, y las AC, DF tambien iguales entre si, y tirense las BE, AD, CF. Y por quanto las BA, ED son
(a) 33. P. 1. iguales, y paralelas, serán (a) las BE, AD que las juntan tambien iguales, y paralelas. Por la misma razon las CF, AD son iguales, y paralelas. Y porque las BE, CF están demostradas iguales, y paralelas a la AD, tambien entre si (b) son iguales, y pa-
(b) 9. P. 11. ralelas: luego las BC, EF que las juntan son (a) igua-
les

les, y paralelas. Y por quanto en los triangulos BAC, EDF los dos lados BA, AC del vno son iguales a los lados ED, DF del otro, y las bases BC, EF iguales, serà (d) el angulo BAC igual al angulo EDF, que es lo que se avia de demostrar. (d) 8. P. 1.

PROBLEMA 1. PROPOSICION 11.

De vn punto dado fuera de vn plano, tirar vna perpendicular a dicho plano.

Del punto dado A fuera del plano se ha de tirar vna perpendicular al plano BC. Tirese en el plano dado la recta DE del punto A, y la AF perpendicular (a) a la DE, y en el plano BC la FH perpendicular a la misma DE, y del punto A la AI perpendicular a la FH: digo, que la AI es perpendicular al plano BC. En el plano BC tirese la KIL paralela (b) a la DE. Y por quanto la DF es perpendicular a las dos rectas FA, FH por la construccion, serà (c) la DF perpendicular al plano de las FA, FH: luego la KI su paralela tambien (d) es perpendicular al mismo plano. Y porque la AI (e) està en el mismo plano de las FA, FH serà (f) el angulo KIA recto: luego la AI es perpendicular a las dos lineas KI, IF [que estàn en el plano BC:] luego es perpendicular (c) al plano BC: luego del punto dado, &c. que es lo que se avia de hazer. Fig. 16. (a) 12. P. 1. (b) 31. P. 1 (c) 4. P. 11. (d) 8. P. 11. (e) 2 P. 11. (f) 3. def. 11

PROBLEMA 2. PROPOSICION 12.

De vn punto dado en vn plano, levantar vna perpendicular a dicho plano.

Fig. 17. Del punto A dado en el plano BC se ha de levantar vna perpendicular. De qualquier punto como del (a) 11.P.11 D fuera del plano BC tirese (a) la DE perpendicular al plano BC, tirese tambien la recta AE en el plano dado, y por el punto A tirese la AF paralela a la DE en el plano GH, que passa por las rectas AE, DE: digo, que la AF es perpendicular al plano BC. Porque las rectas DE, AF son paralelas por la construccion; pero la DE es perpendicular al plano BC: luego (b) la AF tambien es perpendicular al mismo plano BC: luego del punto dado, &c. que es lo que se avia de hazer.

(b) 8.P.11.

THEOREMA 11. PROPOSICION 13.

De vn punto dado en vn plano, no se pueden tirar dos perpendiculares a dicho plano.

Porque las perpendiculares a vn mismo plano (c) son paralelas entre si; pero estas concurren en el punto dado: luego no pueden ser paralelas: luego ni tampoco perpendiculares al plano dado, que es lo que, &c.

(c) 6.P.11.

THEO-

THEOREMA 12. PROPOSICION 14.

Si vna linea recta es perpendicular a dos planos, seràn paralelos.

La recta AB sea perpendicular a los planos CD, EF: digo, que son paralelos; porque si no lo son, alargados concurriràn hàzia alguna parte: concurran si es possible hàzia las partes C, y E, y sea la seccion comun (d) la recta GH en la qual a vn punto como I tirense las rectas AI, BI en los planos GCD, GEF. Y porque la recta AB es perpendicular a los planos GCD, GEF por la suposicion, seràn (e) los angulos IAB, IBA rectos: luego en el triangulo AIB dos angulos son iguales a dos rectos, lo que (f) no puede ser: luego los planos CD, EF no pueden concurrir: luego son paralelos, que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 18.
(d) 3. P. 11.
(e) 3. def. 11
(f) 17. P. 1.

THEOREMA 13. PROPOSICION 15.

Si dos lineas rectas que se tocan en vn plano son paralelas a otras dos, que se tocan en otro, tambien los planos que passan por ellas, son paralelos.

Las rectas AB, AC, que se tocan en el punto A sean paralelas a las rectas DE, DF, que se tocan en

Fig. 19.

en el punto D en distinto plano: digo, que los planos BG, y EF, que passan por ellas, son paralelos.
(a) Del punto A tirese (a) la AG perpendicular al
11.P.11 plano EF, y cayga en el punto G, y por èl en el pla-
(b) no EF, tirense (b) las GH, GI paralelas a las DE,
31.P.1. DF. Y por quanto las rectas AB, GH son parale-
(c) 9.P.11. las a la DE, seràn (c) tambien paralelas entre si:
(d) luego (d) los angulos BAG, AGH son iguales a
29.P.1. (e) dos rectos; pero el angulo AGH (e) es recto: luego
3.def.11 el angulo BAG es tambien recto. De la misma manera se demuestra que el angulo CAG es recto. Y porque la recta GA es perpendicular a las dos rec-
(f) tas AB, AC, serà (f) tambien perpendicular al
4.P.11. plano BC, que passa por ellas: luego la AG es per-
(g) pendicular a los planos BC, EF: luego (g) los pla-
14.P.11 nos BC, EF son paralelos, que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 14. PROPOSICION 16.

Si dos planos paralelos se cortan con otro, las comunes secciones son paralelas.

Fig. 20. Los planos AB, CD paralelos, cortense con el plano EF: digo, que las comunes secciones EH, GF son paralelas. Porque si no lo son, prolongadas concurriràn en algun punto, como en I, por estar en el mismo plano secante EF; pero la recta HEI en-
(a) tera està en el plano AB, y la FG entera (a) en el
1.P.11. pla-

plano CD: luego los planos AB, CD prolongados tambien concurrirán en I, que es contra lo supuesto: luego las comunes secciones EH, GF no pueden concurrir: luego son paralelas, que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 15. *PROPOSICION* 17.

Si planos paralelos cortan a dos lineas rectas, las cortarán en partes proporcionales.

A las rectas AB, CD corten los planos paralelos EF, GH, IK en los puntos L, M, N, O, P, Q: digo, que las cortarán en partes proporcionales, como LM a MN, assi OP a PQ. Tirense las rectas LO, NQ en los planos *EF*, IK, y la recta LQ, que passe por el plano GH en el punto R, y del punto R tirense las rectas RM, RP en el plano GH, y estará el triangulo (a) LNQ en vn plano, y el triangulo LOQ tambien en vn plano: y porque los planos paralelos GH, IK se cortan con el plano del triangulo LNQ, serán (b) las comunes secciones MR, NQ paralelas. Por la mesma razon las rectas RP, LO son paralelas: luego en el triangulo LNQ es (c) como LR a RQ, assi LM a MN tambien en el triangulo LOQ es como LR a RQ, assi OP a PQ: luego (d) es como la LM a la MN, assi la OP a la PQ, que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 21.

(a) 2. *P.* 11.

(b) 16. *P.* 11

(c) 2. *P.* 6.

(d) 11. *P.* 5.

THEO-

THEOREMA 16. PROPOSICION 18.

Si vna linea recta es perpendicular a vn plano, todos los planos que passan por ella, son perpendiculares al mismo plano.

Fig. 22. La recta AB sea perpendicular al plano CD: digo, que todos los planos que passan por la recta AB son perpendiculares al mismo plano CD. Passe por la linea AB qualquier plano EF, que corte el plano CD por la comun seccion FG, y de qualquier
(a) punto della, como H tirese (a) la HI paralela a la
31. p. 1. AB en el plano EF. Y porque las lineas AB, IH son paralelas, y la AB se supone perpendicular al plano CD,
(b) no CD, tambien (b) lo serà la IH al mismo plano, y
8. p. 11. (c) a la comun seccion FG. De la misma suerte se de-
(c) 3. def. 11 muestra, que qualquier otra paralela a la linea AB serà perpendicular al plano CD, y a la seccion comun FG: luego (d) el plano EF es perpendicular
(d) al plano CD. De la misma manera se demuestra de
4. def. 11 qualquier otro que passe por la recta AB: luego si vna linea recta, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEO-

THEOREMA 17. PROPOSICION 19.

Si dos planos que se cortan son perpendiculares a vn plano, la comun seccion de entrambos serà tambien perpendicular al mismo plano.

Los dos planos AB, CD, que se cortan por la recta EF sean perpendiculares al plano GH: digo, que la comun seccion EF es tambien perpendicular al plano GH. Porque por quanto el plano AB es perpendicular al plano GH podrà levantarse desde el punto F en el plano AB vna perpendicular al plano GH; (a) conviene a saber la que del punto F en el plano AB fuere perpendicular a la comun seccion de los planos AB, y GH. Assimismo, porque el plano CD es perpendicular al plano GH, podrà levantarse (a) en el CD del punto F vna perpendicular al plano GH; pero (b) del punto F no se puede levantar mas que vna perpendicular al plano GH: luego la tal perpendicular aviendo de estar en entrambos planos AB, y CD, serà dellos la comun seccion EF: luego si dos planos, &c. que es lo que se avia de demostrar. Fig. 23. (a) 4. def. 11. (b) 13. P. 11.

THEO-

THEOREMA 18. PROPOSICION 20.

Si vn angulo solido està contenido de tres angulos planos, qualesquiera dos juntos son mayores que el tercero.

Fig. 24. El angulo solido A estè contenido de los tres angulos planos BAC, CAD, DAB: digo, que qualesquiera dos juntos son mayores que el tercero. Porque si todos tres son iguales entre si, es manifiesto; si son desiguales, sea el BAD maximo: digo, que es menor que los otros dos juntos: al angulo BAC hagase (a) igual el angulo BAE, y cortense las AC, AE iguales entre si, y por el punto E tirese la recta BED, y las BC, CD. Y por quanto los angulos BAE, BAC son iguales por la construccion, y los lados *BA*, *AE* iguales a los lados *BA*, *AC*: luego (b) las bases *BE*, *BC* son iguales; pero [c] los dos lados *BC*, *CD* son mayores que el tercero *BD*: luego quitando de entrambas partes las *BC*, y *BE* iguales, quedarà la CD mayor que la ED. Y porque en los triangulos CAD; EAD los dos lados *CA*, *AE* son iguales por la construccion, y el *AD* comun; pero la base CD mayor que la ED, el angulo *CAD* [d] serà mayor que el *EAD*; pero el *BAC* es igual al *BAE*: luego los dos angulos *BAC*, *CAD* juntos son mayores que los dos *BAE*, *EAD* juntos; esto es, qne el angulo total *BAD*: luego si vn angulo solido, &c. que es lo que se avia, &c.

(a) 23. P. 1.
(b) 4. P. 1.
(c) 20. P. 1.
(d) 24. P. 1.

THEO-

THEOREMA 19. PROPOSICION 21.

Todos los angulos planos que pueden componer vn angulo solido juntos son menos que quatro rectos.

El angulo solido A estè contenido de los cinco angulos planos BAC, CAD, DAE, EAF, FAB: digo, que estos cinco angulos juntos [y aunque fuessen mas en numero] son menos que quatro rectos. Tirense las rectas BC, CD, DE, EF, FB, y quedan constituidos los angulos solidos B, C, D, E, F; y porque del angulo solido C los dos angulos (a) ACB, ACD son mayores que el tercero BCD, y del angulo solido D los dos ADC, ADE mayores que el CDE, y del angulo E los dos AED, AEF mayores que el DEF, y del angulo F los dos AFE, AFB mayores que el EFB, y del angulo B los dos ABF, ABC mayores que el FBC seràn los diez angulos planos ACB, ACD, ADC, ADE, AED, AEF, AFE, AFB, ABF, ABC mayores que los cinco angulos planos BCD, CDE, DEF, EFB, FBC; pero (b) estos cinco son iguales a seis rectos: luego los diez son mas que seis rectos; pero los diez angulos planos cō los cinco angulos planos que forman el angulo solido A son iguales a diez rectos [en los cinco triangulos BAC, &c.] luego los cinco angulos que forman el angulo solido A son menos que quatro rectos: luego todos los angulos planos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 25.

(a) 20. *P.* 11

(b) *Cor.* 4. 32. *P.* 1.

S C H O L I O.

Desta propoſicion ſe ſigue, que ſolas tres eſpecies de figuras planas regulares, y iguales; conviene a ſaber triangulos, quadrados, y pentagonos, pueden formar vn cuerpo regular, como 4, ò 8, ò 20 triangulos equilateros, quadrados 6. pentagonos 12; y por conſiguiente ſolamente ay cinco cuerpos regulares: el tetraedro, ò pyramide de 4 triangulos equilateros, el octaedro de 8, el icoſaedro de 20, el cubo de 6. quadrados, y el dodecaedro de 12 pentangonos. Cuerpo regular ſe llama aquel que eſtà contenido de planos regulares, y iguales. Demueſtraſe.

1. *De dos triangulos equilateros no ſe puede formar vn angulo ſolido, porque para eſte (a) ſon meneſter a lo menos tres angulos planos.*

(a) 11 def. 11

2. *De tres triangulos equilateros que concurren en vn punto ſe puede formar vn angulo ſolido de la pyramide: de quatro triangulos equilateros ſe forma el angulo ſolido del octaedro; de cinco triangulos equilateros el angulo ſolido del icoſaedro, porque (b) de vn triangulo equilatero los 3, y 4, y 5. angulos ſon menores que quatro rectos.*

(b) 32. p. 1.

3. *Y porque tres angulos de vn pentagono ſon (c) menores que quatro rectos, podràn concurrir tres pentagonos en vn punto, y formar el angulo ſolido del dodecaedro.*

(c) Cor. 11. p. 4.

4. *Tres quadrados que concurren en vn punto forman el angulo ſolido del cubo, y deſta manera quedan formados los cinco cuerpos regulares.*

Fue-

Fuera destos cinco no puede aver otro cuerpo regular; porque (d) seis angulos de vn triangulo equilatero son iguales a quatro rectos: luego no pueden formar vn angulo solido. Por la misma razon quatro quadrados no pueden formar vn angulo solido. (d) Cor. 32. P. 1.

Quatro angulos de vn pentagono son mayores que quatro rectos, porque cada vno (e) es igual a seis quintas partes de vn recto: luego quatro angulos de vn pentagono no pueden formar vn angulo solido. (e) Cor. 11. P.4.

Tres angulos de vn hexagono son iguales a quatro rectos, porque cada vno es igual a quatro tercias partes (f) de vn recto: luego tres angulos de vn hexagono no pueden formar vn angulo solido. Y de los demàs polygonos regulares, como de vn heptagono, &c. tres angulos son mayores que los del hexagono: luego tres angulos de ninguna destas figuras podràn constituir vn angulo solido: luego fuera de los dichos cinco cuerpos, no puede aver otro cuerpo regular. (f) 2. Cor. 15. P. 4.

Para saber quantos lados tendrâ qualquiera de los cuerpos regulares, multipliquese el numero de las bases juntas por el numero de los lados de vna base, y del producto la mitad es el numero de los lados: como las bases del dodecaedro son 12 pentagonos, multipliquense 12 por 5, que son los lados del pentagono, sale 60; y porque siempre dos rectas concurren en vn lado, la mitad 30. es el numero de los lados del dodecaedro.

Para saber los angulos solidos, multipliquense los angulos de vna base por el numero de las bases; y partase el producto por el numero de los angulos que concurren para formar

mar vn angulo solido, el cociente darà los angulos solidos: como el icosaedro los 3 angulos de vn triangulo multiplicados por 20, produce 60, y este producto partido por 5, qu son los angulos que concurren para formar vn angulo solido, tendrà por cociente 12, que es el numero de los angulos solidos del icosaedro.

THEOREMA 20. PROPOSICION 22.

Dados tres angulos rectilineos contenidos de iguales rectas, de los quales cada dos son mayores que el tercero, se podrà constituir vn triangulo de las bases que juntan dichas rectas iguales.

Fig. 26. Sean los tres angulos planos A, B, C contenidos de las rectas iguales AD, AE, BF, BG, CH, CI, de los quales cada dos sean mayores que el tercero: digo, que de las tres bases DE, FG, HI, que juntan las rectas iguales se puede constituir vn triangulo. Porque si los tres angulos A, B, C son iguales, seràn (a) las bases DE, FG, HI iguales, y si dos angulos son iguales, y el tercero menor, seràn (b) dos bases iguales, y la tercera menor: luego en entrambos casos qualesquiera dos seràn mayores que la tercera. Sea lo tercero el angulo A el maximo, y los otros dos como quiera, y serà la base DE (b) la maxima: luego las DE, *FG* juntas son mayores que la HI, y las DE, HI juntas mayores que la *FG*: digo, que tambien las *FG*, *HI* juntas son mayores que la DE: formese el angulo DAK (c) igual al angulo B, y hagase la AK igual a la AD, y caìrà el pun-

(a) 4. P. 1.
(b) 24. P. 1.
(c) 23. P. 1.

punto K debaxo de la recta DE [porque del punto A, como centro, y con la distancia AD passarà el arco de vn circulo por los puntos D, K, E,] tirense las rectas DK, KE. Y por quanto los dos angulos B, C juntos se suponen mayores que el angulo *DAE*, y el *DAK* se hizo igual al angulo *B*, serà el angulo C mayor que el residuo K*AE*; y porq̃ en los triangulos *AD*K, *BFG* los dos lados *AD*, *AK* del vno son iguales a los dos *BF*, *BG* del otro, seràn (d) las bases DK, *FG* iguales; pero en los triangulos *AKE*, CHI los lados *AK*, *AE* son iguales a los lados CH, CI, y el angulo *KAE* menor que el C: luego (e) la base KE es menor que la HI; pero la DK està demostrada igual a la *FG*: luego las *FG*, *HI* son mayores que las DK, KE: luego (f) mucho mayores que la DE: luego de las tres rectas (g) *DE*, *FG*, *HI* se podrà formar vn triangulo, que es lo que se avia de demostrar.

(d) 4. P. 1.
(e) 24. P. 1.
(f) 20. P. 1.
(g) 22. P. 1.

PROBLEMA 3. PROPOSICION 23.

Formar vn angulo solido de tres angulos planos, cada dos de los quales sean mayores que el tercero, y todos juntos menores que quatro rectos.

Fig. 27.

De los tres angulos planos *A*, *B*, *C* menores que quatro rectos, y cada dos mayores que el tercero, se ha de formar vn angulo solido: tomense iguales las rectas *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, *CH*, *CI*, tirense las bases *DE*, *FG*, *HI*, y formese (a) dellas el triangulo (a) 22. P. 1.

KLM

(b) 5. P. 4. KLM, y ſean iguales DE a la KL, la FG a la LM,
la HI a la KM, y al triangulo KLM (b) circumſcri-
(c) 1. P. 3. baſe el circulo KLM, tomeſe (c) ſu centro N, ti-
renſe las rectas NK, NM, NL, y del centro N al
(d) 12. P. 11 plano del circulo (d) levanteſe la perpendicular
NO de tal magnitud, que los dos quadrados de la
LN, y NO ſean iguales al quadrado del lado AD,
que es el vno de los que comprehenden los angulos
planos, y tirenſe las rectas LO, KO, MO: digo,
que el angulo ſolido O està contenido de angulos
planos iguales a los A, B, C. Porque las lineas NL,
(e) 3 def. 11 NM, NK ſon iguales, y la NO (e) perpendicular
(f) Cor. 46. P. 1. a ellas: luego (f) las rectas LO, MO, KO ſon igua-
les, por ſer ſus quadrados iguales a los quadrados
(g) 47. P. 1. (g) de la NL, y NO; pero el quadrado del lado
AD, &c. es igual a eſtos miſmos quadrados por la
conſtruccion: luego las rectas LO, MO, KO ſon
iguales a los lados AD, &c. que comprehenden los
angulos planos A, B, C; pero tambien las baſes KL,
LM, MK ſon iguales a las baſes DE, FG, HI por la
conſtruccion: luego (h) los tres angulos planos al
(h) 8. P. 1. punto O ſon iguales a los tres angulos A, B, C: lue-
go ſe ha formado vn angulo ſolido, &c. que es lo
que ſe avia de hazer.

SCHOLIO.

Fig. 27. *Que la recta NL es menor que la AD para poder cortar*
la

la NO, cuyo quadrado con el quadrado de la NL sea igual al quadrado de la AD, demuestrase desta manera. Porque si las NL, NK son iguales a las AD, AE, y la base KL es igual a la base DE por la construccion, serà (h) el angulo KNL igual al angulo A. Por la misma razon los angulos LNM, y B, y los KNM, y C seràn iguales entre si; pero los tres angulos (i) KNL, LNM, KNM son iguales a quatro rectos: luego los angulos A, B, C seràn tambien iguales a quatro rectos, lo que es contra lo supuesto: luego la NL no puede ser igual a la AD. Y si la NL se dize que es mayor que la AD, cortense las NQ, NP iguales a las AD, AE, tirese la recta QP, y seràn (k) los triangulos NQP, NKL equiangulos: luego es como la NK a la KL, assi la NQ a la QP; pero la NK es mayor que la NQ: luego (l) la KL, ò su igual DE tambien es mayor que la QP: y porque en los triangulos ADE, QNP los lados AD, AE son iguales a los lados NQ, NP; pero la base DE mayor que la base QP serà (m) el angulo A mayor que el angulo QNP. De la misma manera se demuestra que el angulo B es mayor que el LNM, y el C mayor que el KNM; pero los tres angulos al centro N son iguales a quatro rectos: luego los A, B, C seràn mayores que quatro rectos, lo que es contra la suposicion.

(h) 8. P. 1.

(i) Cor. 15. P. 1.

(k) Cor. 1. 4. P. 6.

(l) 14. P. 5.

(m) 24. P. 1.

THEOREMA 21. PROPOSICION 24.

Si vn solido està contenido de planos paralelos, los opuestos son paralelogrammos semejantes, y iguales.

El

Fig. 28. (a) 13.def.11 El paralelepipedo (a) ABEF estè contenido de los seis quadrilateros AC, CF, FH, HA, AF, BE, de los quales cada dos opuestos sean paralelos: digo lo primero, que los planos opuestos son paralelogrammos. Porque los planos paralelos BG, CF (b) 16.P.11 estàn cortados con el plano AC: luego (b) las comunes secciones AB, CD son paralelas. Assimismo porque los planos paralelos *AF*, *BE* estàn cortados con el plano *AC*, las comunes secciones *AD*, *BC* son paralelas: luego el quadrilatero *ABCD* es vn paralelogrammo. De la misma suerte se demuestra que los otros quadrilateros son paralelogrammos.

Digo lo segundo, que son semejantes. Porque las rectas *AB*, *BH* son paralelas a las rectas *DC*, *CE*, (c) 10.P.11 que estàn en el plano opuesto: luego (c) los angulos *ABH*, *DCE* son iguales: por la misma razon los demàs angulos son iguales entre si. Y porque (d) 34.P.1. (d) las *AB*, *DC* son iguales entre si, y tambien las *BH*, *CE* entre si, serà como la *AB* a la *BH*, assi la *DC* a la *CE*; lo mismo es de los demàs lados que comprehenden iguales angulos en los paralelo- (e) 1.def.6. grammos *HA*, *CF*: luego (e) los paralelogrammos *AH*, *CF* son semejantes.

Digo lo tercero, que son iguales: tirense las diagonales *AH*, *DE*; y por quanto en los triangulos *ABH*, *DCE* los lados *AB*, *BH* son iguales a los lados *DC*, *CE*, y los angulos *ABH*, *DCE* iguales: luego

go (f) los triangulos ABH, DCE son iguales; pero estos (g) son mitades de los paralelogramos HA, CF: luego los paralegrammos HA, CF son iguales entre si. Lo mismo se demuestra de qualesquiera dos opuestos: luego si vn solido, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(f) 4. 1. (g) 34. P. 1.

THEOREMA 22. PROPOSICION 25.

Si vn paralelepido se corta con vn plano paralelo a los opuestos, serà como la base a la base, assi el solido al solido.

El paralelepipedo ABCD cortese con el plano IQ paralelo a los planos opuestos AD, BC: digo, q̃ es como la base AH a la base HB, assi el solido *AI* al solido IB. Imaginese el paralelepipedo ABCD alargado hazia las partes AD, BC, y en la recta AB tomese la AE igual a la AQ, y la BK igual a la QB [y se puede tomar qualesquiera multiplices dellas,] y cumplanse los paralelogrammos EM, BN, y los AL, BO con sus opuestos, y los EF, PK, y quedaràn formados los paralelepipedos, AF, BP. Y porque las rectas AE, AQ son iguales, los paralelogrammos EM, MQ (a) son iguales, y los opuestos (b) LD, DG tambien iguales. Por la misma razō los paralelogrammos AL, AG, y MF, MI, y los AD, EF, QI son iguales entre si: luego (c) los solidos AF, AI son iguales. Por la misma razon los solidos BP, BI son iguales: luego todo el solido EI es igual-

Fig. 29.

(a) 1. P. 6. (b) 24. P. 11 (c) 10 def. 11

mente multiplice del solido AI, como la base EH de la base AH, y todo el solido QP es igualmente multiplice del solido CQ, como la base QN de la base *BH*; pero si la base EH es igual, mayor, ò menor que la base QN, tambien el solido EI será igual, mayor, ò menor que el solido QP; porque siendo la base EH igual a la QN, tambien los seis paralelogrammos del solido EI son semejantes, y iguales a los seis paralelogrammos del solido QP. Aviendo pues quatro magnitudes, la primera, la base AH, la segunda la base HB, la tercera el solido AI, la quarta el solido IB; y siendo los multiplices tomados de la primera, y tercera, igualmente mayores, menores, ò iguales que los multiplices de la segunda, y de la quarta, será (d) como la base AH a la base HB, assi el solido AI al solido IB, que es lo que se avia de demostrar.

(d) *6. def. 5.*

Lo que se dize de los paralelepipedos, de la misma manera se demuestra de qualesquiera prismas.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que si qualquier prisma se corta con vn plano paralelo a los opuestos, que la seccion es figura semejante, y igual a los planos opuestos; porque està demostrado, que la seccion IQ es semejante, y igual a los planos opuestos AD, BC.

PRO-

PROBLEMA 4. PROPOSICION 26.

A vna recta dada, y vn punto en ella formar vn angulo solido igual a vno dado.

A la linea AB, y a su punto A se ha de formar vn angulo solido igual al angulo solido C, contenido de los tres angulos planos DCE, DCF, FCE. Del punto F tirese (a) la perpendicular FG al plano que passa por las rectas CD, CE, y tirense las rectas DF, DG, EF, EG, CG, y cortese la AH igual a la CD, y hagase (b) el angulo HAI igual al angulo DCE, y las rectas AI, CE iguales, y en el plano de las rectas AH, AI hagase el angulo HAL igual al angulo DCG, y las rectas AL, CG iguales, y quedan los angulos LAI, GCE iguales: del punto L levantese (c) la LK perpendicular al plano de las rectas AH, AL, AI, y haganse las LK, FG iguales, y tirese la AK: digo, que el angulo solido A contenido de los tres angulos planos HAI, HAK, KAI es igual al angulo solido C. Tirense las rectas HK, HL, IK, IL. Y porque en los triangulos HAL, CDG los lados AH, AL son iguales a los lados CD, CG, y los angulos HAL, DCG iguales, las bases (d) HL, DG son iguales. Por la misma razon en los triangulos LAI, GCE las bases LI, GE son iguales; y porque en los triangulos HLK, DGF

Fig. 30.

(a) 11. P. 11.

(b) 23. P. 1.

(c) 12. P. 11.

(d) 4. P. 1.

los lados HL, LK son iguales a los lados DG, GF,
(e) 3.def.11 y los angulos (e) HLK, DGF rectos, seran (f) las
(f) 4.P.1. bases HK, DF iguales. Por la misma razon en los triangulos ILK, EGF las bases IK, EF son iguales. Y porque en los triangulos HAK, DCF los lados HA, AK son iguales a los lados DC, CF, y las ba-
(g) 8.P.1. ses HK, DF iguales, los angulos (g) HAK, DCF son iguales. Por la misma razon los angulos KAI, FCE son iguales entre si: luego el angulo solido A contenido de los tres angulos HAI, HAK, KAI es igual al angulo solido C, que es lo que se avia de hazer.

PROBLEMA 5. PROPOSICION 27.

Sobre vna recta dada describir vn paralelepipedo semejante, y semejantemente puesto a vn paralelepipedo dado.

Fig.31. Sobre la recta AB se ha de describir vn paralelepipedo semejante, y semejantemente puesto al da-
(a) 26.P.11 do CD. Al punto A de la recta AB hagase (a) vn angulo solido igual al angulo solido C de suerte que los tres angulos planos ECG, GCF, FCE sean iguales a los tres HAI, IAB, BAH: hagase tambien
(b) 12.P.6. (b) como la CF a la CG, assi la AB a la AI; y como
(c) 22.P.5. la CG a la CE, assi la AI a la AH; y serà (c) por la igualdad, como la CF a la CE, assi la AB a la AH, y cumplase el paralelepipedo AK; cumpliendo los paralelogrammos BH, HI, IB con sus opuestos: digo,

go, que el paralelepipedo AK es ſemejante, y ſemejantemente pueſto al CD. Porque ſiendo cerca de los angulos iguales BAH, FCE los lados *BA*, *AH* proporcionales a los lados FC, CE por la conſtruccion, ſeràn (d) los paralelogrammos HB, EF ſemejantes, y ſemejantemente deſcriptos. Por la miſma razon los paralelogrammos HI, EG, y los IB, GF ſon ſemejantes entre ſi: luego los tres planos BH, HI, IB del ſolido *AK* ſon ſemejantes, y ſemejantemente pueſtos a los tres planos EF, E G, GF del ſolido CD, y tambien los opueſtos a eſtos: (e) luego el ſolido *AK* (f) es ſemejante, y ſemejantemente pueſto al ſolido CD: luego ſobre vna recta; &c. que es lo que ſe avia de hazer.

(d) 1. def. 6.

(e) 24. P. 11

(f) 9. def. 11

THEOREMA 23. PROPOSICION 28.

Vn paralelepipedo ſe divide en dos partes iguales por el plano diagonal.

Fig. 32.

En el paralelepipedo *AB*, y ſus planos opueſtos *AH*, *EB* ſean las diagonales CG, DF. Y por quanto las lineas CD, G*F* (a) ſon iguales, y paralelas a la linea *AE* [en los paralelogrammos CE, y GE:] luego (b) las CD, y G*F* ſon iguales, y paralelas, y eſtan en vn miſmo plano; pero (c) las CG, D*F* tambien ſon iguales, y paralelas: luego las quatro rectas CD, G*F*, CG, D*F* (d) eſtàn en vn miſmo plano: digo, que el plano que paſſa por las diagona-

(a) 34. P. 1.

(b) 9. P. 11.

(c) 33. P. 1.

(d) 7. P. 11.

nales CG , DF corta el folido AB en dos partes
(e) 24.P.11 iguales. Porque los planos AH, EB *(e)* fon paralelogrammos iguales, y femejantes: luego *(e)* los
(f) 6.P.6. triangulos AGC, GCH fon iguales, y femejantes a los triangulos EFD, FDB, y tambien(f)entre fi;
pero el paralelogrammo AF es igual, y femejante
(g) 10def.11 al CB, y el AD al GB, y el CF comun: luego (g) los prifmas ACGFED, y HGCDBF fon iguales entre fi: luego el paralelepipedo AB eftà cortado en dos partes iguales por el planoCF, que es lo que fe avia de demoftrar.

THEOREMA 24. PROPOSICION 29.

Los paralelepipedos conftituidos fobre vna mifma bafe, y en vna mifma altura, de quienes las infiftentes lineas eftàn en vnas mifmas rectas, fon iguales entre fi.

Fig.33. Sobre la bafe AHBE, y en la mifma altura [efto es entre vnos mifmos planos paralelos] eftèn conftituidos los paralelepipedos ACDE, AFGE, de quienes las infiftentes lineas AI, AK, EL, EM eftàn en la recta IM, y las HC,HF,BD,BG en la recta CG: digo, que los paralelepipedos AD,AG fon iguales entre fi. Porque los paralelogrammos *AL*, *AM* fobre la bafe *AE*, y entre las paralelas *AE,IM*
(a) 35.P.1. (a) fon iguales, y quitando el comun trapezio
(b) *AELK*, quedan los triangulos *AIK*, ELM igua-
34.P.1. les; y porque todos los lados del triangulo *AIK*(b) fon

son iguales a los lados del triangulo *HCF* cada vno al suyo, los (c) dichos triangulos son iguales, y equiangulos: luego (d) son semejantes. Por la misma razon los triangulos ELM, BDG son iguales, y semejantes, y los paralelogrammos (e) *AC*, *DE*, y los *AF*, *EG* son iguales, y semejantes entre si, y tambien los IF, LG sobre iguales bases IK, LM: luego (f) los prismas *AF*, *EG* son iguales entre si, y añadiendo el comun solido *AHFLDBE* a entrambos, quedan los paralelepipedos *AD*, *AG* iguales: luego los paralelepipedos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(c) 8. P. 1.
(d) 1. def. 6.
(e) 24. P. 11
(f) 10. def. 11

SCHOLIO.

Esta Proposicion es semejante a la 35. P. 1. y la demonstracion casi la misma, tomando los prismas en lugar de los triangulos.

THEOREMA 25. PROPOSICION 30.

Los paralelepipedos constituidos sobre vna misma base, y en vna misma altura, de quienes las lineas insistentes no estàn en vnas mismas rectas, son iguales entre si.

Sobre la base *AHBK*, y en la misma altura (esto es entre vnos mismos planos paralelos) estèn constituidos los paralelepipedos *AIDK*, *AMFK*, de quienes las lineas insistentes [que salen

Fig. 34.

falen de los quatro angulos de la base] *AC*, *AE*, *KG*, *KL*, *HI*, *HM*, *BD*, *BF* no están en vnas mismas lineas rectas, de suerte que alargadas las rectas *CI*, *GD*, y las *CG*, *ID* no passen por los puntos M, E, *F*, L: digo, que los paralelepipedos *AIDK*, *AMFK* son iguales entre si. Porque los planos *CD*, *EF* están en vn mismo plano [*que es el opuesto a la base AHBK*] por ser los paralelepipedos de vna misma altura: luego si en este plano se alargan las rectas *CG*, *ID*, cortarán a las EM, L*F* alargadas en los puntos N, O, P, Q: tirense las rectas *AN*, KO, HP, BQ. Y porque las rectas PQ, M *F* son
(a) 34. P. 1. iguales (a) [lados opuestos en el paralelogrammo *FP*] y la M*F* es igual a la HB: luego las PQ, HB son iguales entre si; pero son tambien paralelas en el
(b) 33. P. 1. paralelogrammo HID*B*: luego (b) *HP*, *BQ* son iguales, y paralelas, y el *HPQB* es vn paralelogrammo. De la misma manera se demuestra, que los *HPNA*, *ANOK*, *KOQB* son paralelogrammos; pero NOQP tambien es vn paralelogrammo: luego el *APQK* es vn paralelepipedo, y es igual
(c) 29. P. 11 (c) al paralelepipedo *AIDK*, porque están sobre vna misma base *AHB*K, y las lineas insistentes están en las rectas CO, IQ. De la misma manera se demuestra, que el paralelepipedo *APQ*K es igual al paralelepipedo *AMF*K, que están sobre la base *AHB*K, y las lineas insistentes están en las rectas
(d) 1. ax. 1. NM, O*F*: luego los paralelepipedos (d) *AID*K, *AM*-

AMFK son tambien iguales entre si, que es lo que se avia de demostrar.

S C H O L I O.

Estas dos proposiciones se pueden convertir desta manera: los paralelepipedos iguales sobre vna misma base, insistiendo, ò no en vnas mismas rectas, estàn en vna misma altura. *Porque si el vno se dize, que es de mayor altura que el otro, cortese del mas alto vn paralelepipedo de igual altura con el otro, quedaràn la parte del cortado (a) y el otro iguales; pero antes de cortarse se suponia igual. luego la parte, y el todo son iguales a vn tercero, y entre si, lo que no puede ser: luego los paralelepipedos iguales, &c.* (a) 29. o 30. p. 11.

THEOREMA 26. PROPOSICION 31.

Los paralelepipedos sobre iguales bases, y en vna misma altura son iguales entre si.

Sobre las bases iguales AO, EG estèn cōstituidos dos paralelepipedos en la altura de la linea S: digo, que los paralelepipedos AOS, EGS son iguales entre si. Alarguese el lado FG, y hagase (a) el paralelogrammo GMKH igual, y semejante al paralelogrammo AO, y cumplase el paralelogrammo GMPR, alarguense las rectas PM, RG, a las quales cortarà la recta KH alargada en los puntos Q, y L, y seràn los paralelogrammos EG, AO, GK, GQ Fig. 35. (a) 45. p. 1.

iguales entre si: sobre las bases GK, GQ, GP, EG imaginense constituidos paralelepipedos, cuyos lados sean perpendiculares a las bases, y la comun
(b) 25.P.11 altura la recta S: el solido EGS será (b) al solido
(c) 7.P.5. GPS, como la base EG, ó su igual (c) AO a la base GP, ò como la base GK a la base GP, ò como la base GQ a la base GP; pero como la base GQ a la baseGP (b) assi es el solido *GQS* al solido *GPS*: luego
(d) 9.P.5. los solidos *EGS*, y *GQS*, q̃ tienen la misma proporcion al solido *GPS*, son (d) iguales entre si; pero el
(e) 29.P.11 solido *GQS* es igual (e) al solido *GKS* [*que tienen vna misma base erigida sobre la recta GM perpendicular al plano LP, y las insistentes lineas GL, GH, MQ, MK estàn en vna misma recta LK, &c.*] y el solido *GKS* es
(f) 10def.11 igual, y semejante al solido AOS, porque estàn (f) contenidos de iguales, y semejantes planos por la construccion: luego el solido *EGS* es igual al solido AOS.

Lo segundo no sean los lados de los paralelepipedos *EGS*, AOS rectos à las bases *EG*, AO, y sobre las mismas bases *EG*, AO imaginense otros paralelepipedos, que tengan lados perpendiculares a las bases, y en vna misma altura, seràn los parale-
(g) 29 o 30. P.11. lepipedos obliquangulos (g) iguales a los rectangulos cada vno al suyo; pero los rectangulos son iguales entre si, como està demostrado: luego los obliquangulos tambien son iguales entre si: luego los paralelepipedos, &c. que es lo que se avia de demostrar. *SCHO-*

SCHOLIO 1.

Esta proposicion se puede convertir desta manera : paralelepipedos iguales sobre iguales bases estàn en vna misma altura; y paralelepipedos iguales en vna misma altura , estân sobre iguales bases, ò sobre vna misma base. Demuestrase como la conversa de la antecedente.

SCHOLIO 2.

Esta proposicion, y otras muchas se pueden demostrar con mas facilidad , entendido , y explicado bien el axioma siguiente, que corresponde a la Proposicion 15. del 5.

Si dos magnitudes se multiplican por otra tercera, los productos son proporcionales a las magnitudes multiplicadas.

Dadas las magnitudes A, B si se multiplican con la cantidad C, seràn los productos AC , BC proporcionales a las magnitudes A, B, de quienes son igualmente multiplices , y las contienen las vezes, que la magnitud C determinare : en los numeros no necessita de explicacion este axioma. Si las magnitudes A , B , C representan lineas , multiplicar las rectas A, y B por la C es juntar la recta C con vn extremo de las A , y B en igual angulo , y cerrar el espacio , formando , ò vn triangulo, ò vn paralelogrammo, ò es levantar

las rectas A, y B, segun la recta C, conservando siempre el mismo angulo, que es lo mismo que repetir las A, y B hàzia la latitud las mismas vezes: y desta manera se formaràn dos paralelogrammos entre vnas mismas paralelas; porque la linea C, ò haze angulos rectos con las A, B, y serà la altura de los triangulos, y paralelogrammos, ò si haze angulos obliquos, seràn otras alturas; pero iguales: luego triangulos, y paralelogrammos en vna misma altura tienen la misma proporcion que sus bases, que es la 1. P. 6.

Si las magnitudes A, B representan superficies, y la C vna linea recta, multiplicar las superficies A, B por la recta C es hazer la linea C insistente a las superficies A, B en vn mismo angulo, y levantar las superficies A, y B segun la recta C, conservando con ella siempre el mismo angulo, que es lo mismo que repetir las superficies hàzia la altura las mismas vezes, y desta manera se formaràn los prismas, y cilindros, y seràn los productos proporcionales a sus bases, y quedan demostradas las 25. 28. 29. 30. 31. 32. P. 11. y todas las que trataren de solidos, que se producen por la multiplicacion de vna misma altura con sus bases.

THEOREMA 27. PROPOSICION 32.

Los paralelepipedos de vna misma altura son entre si como sus bases.

Fig. 36. Sobre las bases GO, y A estèn dos paralelepipedos en vna misma altura de la linea K: digo, que los pa-

paralelepipedos GOK, y AK tienen la misma proporcion que las bases. Sobre la linea CO (a) hagase el paralelogrammo OE igual al paralelogrammo A en el angulo FOC igual al angulo B, y sobre las bases GO, OE imaginense dos paralelepipedos en la altura K, seràn estos partes de vn paralelepipedo BEK: luego (b) el paralelepipedo OEK al GOK tiene la misma proporcion que la base OE, ò su igual A a la base GO; pero los paralelepipedos OEK, y AK sobre iguales bases, y en vna misma altura (c) son iguales entre si: luego el paralelepipedo AK al GOK (d) tiene la misma proporcion que la base A a la base GO: luego los paralelepipedos, &c.

(a) 45. P. 1.
(b) 25. P. 11
(c) 30. P. 11
(d) 7. P. 5.

SCHOLIO 1.

Esta proposicion se puede convertir desta manera: si los paralelepipedos tienen la misma proporcion que las bases, estàn en vna misma altura: la demonstracion es semejante a la del Scholio de la Prop. 30.

SCHOLIO 2.

Los paralelepipedos sobre vna misma base son entre si como sus alturas.

Porque los paralelogrammos formados de la altura, y de vn lado de la base comun, se tomaràn por bases, y serà (a) como la altura a la altura, assi la base a la base, y en el pa-

(a) 1. P. 6.

ra-

ralelogrammo que se daba por base se tomarà la altura comun a entrambos paralelepipedos.

Lo que se demuestra en esta proposicion de los paralelepipedos, se demostrarà en el libro 12. de las pyramides Prop. 9. de qualesquiera prismas 1. corol. 9. P. de conos, y de cylindros, prop. 11.

THEOREMA 28. PROPOSICION 33.

Semejantes paralelepipedos tienen triplicada la razon de sus lados homologos.

Fig. 37. Sean los paralelepipedos AE, y KO semejantes
(a) 9.def.11 entre si, que tendràn (a) todos los planos semejantes, el AC al KN, el BE al LO, &c. y serà (b) co-
(b) 1.def. 6. mo la AB a la BC, assi la KL a la LN, y como la AB a la BD, assi la KL a la LM, &c. y los angulos soli-
(c) 11.def.11 dos A, y K (c) seràn iguales, &c. A los lados homologos AB, KL tomese la tercera proporcional Q, y la quarta R alarguense las lineas SC, AB, y hagase como la BC a la PK, assi la KL a otra quarta, y sea la BF, [que serà igual a la Q:] cumplase
(d) 14.P. 6. el paralelogrammo BG, que serà (d) igual al paralelogrammo KN, y sobre la base BG cumplase el paralelepipedo BH entre los mismos planos para-
(e) 25.P.11 lelos con el AE, y serà (e) como la base AC a la base BG, ò a su igual KN, assi el solido AE al solido

do BH: pero (f) la base AC a su su semejante KN tiene la misma proporcion, que el lado AB a la tercera proporcional Q: luego (g) el solido AE al BH tiene la misma proporcion que la recta AB a la Q. En la recta BD hagase la BT [*sea ella mayor, ò menor que la BD*] igual a la recta KX, y cortese [*ò alarguese*] el paralelepipedo BH con el plano TV paralelo a la base BG, que formarà el paralelepipedo BV (h) igual al KO por estar sobre iguales bases BG, KN, y de vna misma altura; pero el paralelepipedo BH al paralelepipedo formado BV [*ò a su igual KO*] tiene (k) la proporcion que la base DF a la base TF, y la base DF a la TF tiene la misma proporcion (l) que la linea BD a la TB, ò a su igual KX, ò ML; pero BD a ML es como la AB a la KL, ò como la Q a la R: luego (m) el solido BH al KO tiene la misma proporcion que la recta Q a la R. Siendo pues como la recta *AB* a la Q, assi el solido AE al *BH*, y como la Q a la R, assi el solido *BH* al KO serà (n) por la igualdad, como la primera *AB* a la quarta continua proporcional R, assi el solido AE al semejante solido KO; pero la primera *AB* a la quarta R tiene triplicada la razon (o) del lado *AB* al lado *K*L: luego el paralelepipedo AE à su semejante *K*O tiene triplicada la razon del lado *AB* a lado semejante *K*L, que es lo que se avia de demostrar.

(f) 20.p.6.
(g) 11.p.5.
(h) 31.p.11.
(k) 25.p.11
(l) 1.p.6.
(m) 11.p.5.
(n) 22.p.5.
(o) 10.def.5

Que

V. Que los solidos BV, KO estèn en vna misma altura es manifiesto: Porque si los solidos son rectos, siendo las rectas BT, KX las alturas son iguales: y si los solidos no son rectos, por ser el angulo solido B igual al A, serà tambien igual al angulo solido K; y porque las BT, KX son iguales, y semejãtemente inclinados a las bases BG, KN seràn las perpendiculares opuestos a iguales angulos de la inclinacion iguales, como facilmente se demostrarà por la 26. P. 1. ò por la 35. P. 11. que es independiente de esta.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que los paralelepipedos equiangulos, aunque no sean semejantes, tienen la razon compuesta de los lados que comprehenden angulos solidos iguales, ó compuesta de las bases, y alturas.

Porque tomadas las AB, KL, hagase como la BC a la LN [ò a su igual KP] assi la KL a otra tercera Q, y como la DB a la ML [ó su igual KX] assi la Q a otra quarta R se demostrarà como antes, que el
(r) solido AE al BH es como la base AC a la base BG. esto es (r) como la
23. P. 6. recta AB a la tercera Q, y q̃ el mismo solido AE al KO tiene la propor-
(ſ) cion que la recta AB a la quarta R; pero la AB a la R (ſ) tiene la razon
5. def. 6. compuesta de dichas razones: luego el solido al solido tiene la misma razon compuesta.

Otra demonstracion desta Proposicion.

Prismas semejantes sobre bases triangulares, ó quadrangulares tienen triplicada la razon de sus lados homologos.

Sean los prismas ABC, DEF semejantes, y los lados A, D

AD, y BE, y CF homologos: digo, que el prisma al prisma tiene triplicada la razon del lado A al lado D. Porque està demostrado (a) *que los tres planos* [ya sean triàgulos, ò paralelogrammos] *AB, BD, ò AE, y DE son continuos proporcionales en la razon del lado A al lado D. Sobre estos tres planos formense en la altura C los solidos ABC, BDC, ò AEC, DEC, que quedaràn* (b) *proporcionales a las bases, y continuos proporcionales en la razon de A a D, y sobre el plano DE formese tambien en la altura F el solido DEF, y serà* (c) *el solido DEC al solido DEF, como la altura C a la altura F; esto es como la A a la D por la suposicion: luego los quatro solidos ABC, BDC, ò AEC, DEC, y DEF son continuos proporcionales en la razon de A a D, y tendrà* (d) *el primero ABC al quarto DEF triplicada la razon que tiene al segundo, esto es triplicada del lado A a su semejante D, que es lo que, &c.*

ABC. BDC. DEC. DEF.
AEC.
A. D. H. K.

(a) Schol. 19 P. 6.
(b) 32. P. 11 ò 2. Schol. 31. P. 11
(c) 2. Schol. 31. P. 11 ò 32 P. 11
(d) 10. def. 5

COROLARIOS.

1 De aqui se sigue, que entre qualesquiera dos solidos semejantes ay otros dos medios proporcionales, que son los BDC, ó AEC, y DEC.

2 Siguese lo segundo, que si los solidos ABC, DEF no son semejantes, sino solamente equiangulos, tienen la razon compuesta de los lados que comprehenden angulos iguales. Porque como B a E, assi se haga D a H; y como C a F, assi sea H a K està demostrado (e) que los planos AB, BD, DE son proporcionales a las rectas A, D, H, y los solidos (f) ABC, BDC, DEC proporcionales a las mismas: pero el solido DEC al solido DEF es como C a F, ó como H a K por la suposicion: luego (g) el primer solido ABC al vltimo DEF tiene la razon compuesta

(e) Schol 19 P. 6.
(f) 2. Schol. 31. P. 11
(g) 5. def. 6.

ta de las razones intermedias; esto es de las razones A a D, y D a H, y H a K, ó de sus igules A a D, B a E, y C a F, que es lo que, &c.

THEOREMA 29. PROPOSICION 34.

Las bases, y alturas de paralelepipedos iguales son reciprocas, y los paralelepipedos cuyas bases, y alturas son reciprocas, son iguales.

Fig.38. Sean lo primero iguales los paralelepipedos ADCB, EHGF sobre las bases AD, EH: digo, que las bases AD, EH, y las alturas de los paralelepipedos son reciprocas.

Lo primero sean los lados AI, EK perpendiculares a las bases AD, EH: luego si las alturas AI, EK

(a) Schol.31. P.11. son iguales, seràn las bases (a) EH, AD tambien iguales: luego es como la base AD a la base EH, assi la altura EK a la altura AI. Si las alturas AI, EK son desiguales, cortese de la mayor EK la EL igual a la AI, y por el punto L passe el plano LM paralelo a la base EH: y porque los solidos ADCB,

(b) 7.P.5. EHGF son iguales por la suposicion, tendràn (b) al solido EM la misma proporcion; pero el solido

(c) 31.P.11 ADCB al EM es (c) como la base AD a la EH por

(d) 25.P.11 ser iguales las alturas AI, EL, y el solido (d) EHGF al EM es como la base KN a la LN: luego es como la base AD a la base EH, assi la base KN a la LN,

(e) 1.P.6. esto es (e) assi la altura EK a la EL, ò a su igual AI: luego es como la base AD a la EH, assi reciprocamente la altura EK a la altura AI.

Si

Si los lados AI, EK son obliquos a las bases, erijanse sobre las mismas bases, y en la misma altura paralelepipedos rectos, que seràn (f) iguales a los obliquos; pero los paralelepipedos rectos reciprocan las bases, y alturas: luego tambien los paralelepipedos obliquos reciprocan las mismas bases, y alturas. (f) 29. y 30. P. 11.

Sean lo segundo las bases reciprocas a las alturas: digo, que los paralelepipedos son iguales. Porque si las alturas EK, AI son iguales, las bases AD, EH tambien son iguales: luego (g) los paralelepipedos son iguales. Si la altura EK es mayor que la AI, cortese la EL igual a la AI: y porque es como la base AD a la EH, assi la altura EK a la AI, ò a su igual EL; y como la EK a la EL, assi es (h) la base KN a la LN: luego es como la base AD a la EH, assi la KN a la LN; pero como la base AD a la EH, assi es (i) el solido ADCB al EM; y como la base KN a la LN, assi es (k) el solido EHGF al EM: luego (l) los solidos ADCB, EHGF tienen la misma proporcion al solido *EM*: luego (m) son iguales entre si: luego las bases, y alturas, &c. que es lo que se avia de demostrar. (g) 31. P. 11 (h) 1. P. 6. (i) 32. P. 11 (k) 25 P. 11 (l) 11. P. 5. (m) 9. P. 5.

COROLARIOS.

Lo que se demostró de los paralelepipedos en las proposiciones 29. 30. 31. 32. 33. 34. tambien se entiende de los prismas triangulares, porque son mitades de los paralelepipedos, como se demostró en la 28. P. y assi.

1 Los prismas triangulares de vna misma altura tienen la proporcion que las bases.

2 Los semejantes tienen triplicada la razon de los lados homologos, y los equiangulos tienen la razon compuesta de los lados que comprehenden angulos solidos iguales

3 De iguales prismas las bases son reciprocas a las alturas; y si estas son reciprocas, los prismas son iguales.

SCHOLIO.

Lo que se demuestra en esta prop. de los paralelepipedos, se demostrarà de pyramides, 9. P. 12. de qualesquiera prismas, 3. corol. P. 9. de conos, y cilindros 15. P. 12.

THEOREMA 30. PROPOSICION 35.

Si a dos angulos planos iguales, y a sus vertices insistieren dos rectas elevadas, que hagan iguales angulos con las primeras lineas, cada vno al suyo; y de qualesquiera puntos de las lineas elevadas se tiraren perpendiculares a los planos en que estàn los angulos propuestos, y de los puntos en que caen las dichas perpendiculares se tiraren rectas a los vertices de los angulos propuestos, estas rectas tiradas con las rectas elevadas formaràn angulos iguales.

Fig. 39. A los angulos planos iguales BAC, EDF, y a sus vertices A, y D insistan las rectas elevadas AG, DH, formando los angulos BAG, EDH, y CAG, FDH iguales entre si; y de los puntos G, y H a los planos en que estàn los angulos BAC, EDF caygan las perpendiculares GI, HK, y de los puntos

I, K

I, K tirense las IA, KD: digo, que los angulos GAI, HDK son iguales entre si. Porque si las rectas AG, DH son desiguales, cortese de la mayor AG la AL igual a la DH, y (a) tirese la LM perpendicular al plano del angulo BAC, y porque las GI, LM son perpendiculares a vn mismo plano, seràn (b) paralelas entre si, y estaràn en el mismo (c) plano del triangulo GAI: luego la LM caìrà en la recta AI. De los puntos M, y K tirense a las rectas AB, AC, DE, EF las perpendiculares MB, MC, KE, KF: tirense tambien las rectas BC, BL, LC, EF, EH, HF. Y porque la LM es perpendicular al plano del angulo BAC, tambien es (d) perpendicular a las rectas AM, BM, CM, que estàn en aquel plano: luego (e) el quadrado de la AL es igual a los quadrados de la AM, ò a sus iguales AC, CM, y al de la ML; pero los CM, y ML son iguales (e) al de la LC: luego el quadrado de la AL es igual a los dos quadrados de las AC, y CL: luego (f) el angulo ACL es recto. Por la misma razon el quadrado de la AL es igual a los quadrados de la AM, ò a sus iguales AB, BM, y al ML; pero los BM, y ML son iguales al quadrado de la BL: luego el quadrado de la AL es igual a los quadrados AB, BL, y el angulo ABL es recto. De la misma suerte se demuestra, que los angulos DFH, DEH son rectos; pero los BAL, EDH, y los CAL, FDH se suponen iguales: luego (g) los lados AB, DE, y BL, EH; item

(a) 11. P. 11
(b) 6. P. 11.
(c) 7. P. 11.
(d) 3. def. 11
(e) 47. P. 1.
(f) 48. P. 1.
(g) 26. P. 1.

(h) item los AC, DF, y CL, FH son iguales entre si:
4.P.1. luego (h) las bases BC, EF, y los angulos ABC, DEF, y ACB, DFE son iguales entre si en los triangulos *BAC*, *EDF*; pero los angulos ABM, ACM son iguales a los de *DEK*, *DFK* por ser rectos: luego los residuos *MBC*, *KEF*, y *MCB*, *KFE* son tambien iguales entre si, y (k) los lados *BM*, *EK*, y
(k) 26.P.1. los CM, FK son iguales entre si en los triangulos *BCM*, *EFK*: luego en los ACM, DFK (h) las bases AM, DK son iguales entre si. Y porque de las rectas iguales BL, EH los quadrados son iguales entre si, y tambien a los BM, ML, y *EK*, *KH*; pero las *BM*, *EK* estàn demostradas iguales: luego los quadrados de las LM, y HK, y las mismas rectas quedan tambien iguales: luego (h) en los triangulos AML, DKH los angulos LAM, HDK son iguales entre si, que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que si en las lineas elevadas se toman iguales rectas AL, DH, las perpendiculares tiradas al plano propuesto, que son las LM. HK son iguales entre si; y si las AL, DH no son iguales, seràn proporcionales a las perpendiculares LM, HK, como està demostrado.

THEOREMA 30. PROPOSICION 36.

El paralelepipedo formado de tres rectas proporcionales es igual al paralelepipedo equiangulo formado de la media.

Sea

Sean las tres rectas A, B, C proporcionales , y del paralelepipedo *EH* la base FD estè contenida de las rectas A, y C , y la insistente recta *EG* sea igual a la media B. Del paralelepipedo XN la base LI equiangula a la FD tenga los lados iguales a la media B, y la insistente XM igual a la misma B, serà el paralelepipedo *EH* contenido de las tres rectas A, B, C, y el XN de la media B: digo, que son iguales entre si. Porque las bases (a) FD, LI son iguales entre si, y los angulos *FED, LXI* tambien iguales por la construccion , a cuyos vertices insisten iguales rectas las *EG, XM* , formando iguales angulos con las lineas *FE, ED*, y *LX, XI*: luego (b) las perpendiculares tiradas desde los puntos G , y M sobre las bases FD, LI seràn iguales ; pero estas son las alturas de los paralelepipedos EH, XN: luego (c) los dichos paralelepipedos son iguales entre si, ò los angulos solidos *E* , y *X* son iguales por la suposicion: luego (d) penetrado el vno con el otro se ajustaràn; y porque las rectas *EG, XM* son iguales, los puntos G, y M coincidiràn : luego es vna misma altura de los solidos la que de los puntos G, ò M cae perpendicular sobre la base , &c. luego el paralelepipedo formado de tres lineas , &c. que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 40.
(a) 14. P. 6.
(b) 35. P. 11
(c) 31 P. 11.
(d) 11 def. 11

SCHO-

SCHOLIO.

Esta proposicion se convierte, si vn paralelepipedo contenido de tres rectas es igual al paralelepipedo de la media, y equiangulo al otro, las tres rectas son proporcionales. Porque se demuestra, que las perpendiculares tiradas (e) de los puntos G, y M son iguales; pero los paralelepipedos son iguales por la suposicion: luego (f) las bases FD, LI son iguales; pero se suponen equiangulas: luego es (g) como la FE a la LX, assi la XI a la ED; esto es como la A a la B, assi la B a la C.

(e) v. fig. ant.

(f) Schol. 31. P. 11.

(g) 14. P. 6.

Nota, que el paralelepipedo contenido de tres rectas de qualquier manera tomadas es de vna misma magnitud.

En esta figura las primeras dos letras expressan la base, y la tercera letra la altura: cotejase el primer caso con el segundo. La base AB a la base CA es (h) como el lado B al lado C, esto es reciprocamente como la altura B a la altura C: luego los (i) paralelepipedos ABC, CAB son iguales. De la misma manera se demuestra, que el primero, y el tercero son iguales entre si.

1	2	3
ABC	CAB	BCA

(h) 2. P. 6.

(i) 34. P. 11

THEOREMA 32. PROPOSICION 37.

Paralelepipedos semejantes, y semejantemente descriptos de quatro rectas proporcionales, son proporcionales; y si los paralelepipedos son proporcionales, las quatro rectas de que se describen son tambien proporcionales.

Sean las quatro rectas A, B, C, D proporcionales: digo, que sus paralelepipedos semejantes tambien

bien ſon proporcionales a las rectas A, y B: tomeſe la tercera proporcional E, y la quarta F, y a las C, y D la tercera proporcional G, y la quarta H. Por quanto los paralelepipedos ſemejantes tienen triplicada la razon de ſus lados homologos (a) ſerà como la A a la F, aſſi el paralelepipedo de la A a ſu ſemejante de la B. Por la miſma razon ſerà como la C a la H, aſſi el paralelepipedo de la C a ſu ſemejante de la D; pero (b) como la A a la F, aſſi es la C a la H: luego tambien es (c) como el paralelepipedo de la A a ſu ſemejante de la B, aſſi el de la C a ſu ſemejante de la D.

A. B. E. F.
C. D. G. H.

(a) 33. p. 11
(b) 34. p. 5.
(c) 11. p. 5.

Sea lo ſegundo como el paralelepipedo de la A a ſu ſemejante de la B, aſſi el de la C a ſu ſemejante de la D: digo, que las rectas A, B, C, D ſon proporcionales. Porque como el paralelepipedo de la A a ſu ſemejante de la B, aſſi es (a) la A a la F; y como el de la C a ſu ſemejante de la D, aſſi es la C a la H: luego (c) es como la A a la F, aſſi la C a la H; pero la A a la F tiene triplicada la razon de la A a la B, y la C a la H tiene triplicada la razon de la C a la D: luego (d) tambien es como la A a la B, aſſi la C a la D, que es lo que ſe avia de demoſtrar.

(d) 35. p. 5.

Eſto miſmo ſe demueſtra de qualeſquiera cuerpos ſemejantes que tienen triplicada la razon de los lados homologos, y la demonſtracion es la miſma; y aſsi los dos pueden ſer priſ-

mas semejantes, ò qualesquiera otros solidos, de que se tratarà en el libro 12.

THEOREMA 33. PROPOSICION 38.

Si vn plano fuere perpendicular a otro, y de vn punto tomado en vno dellos, se tira vna perpendicular al otro, cairà en la comun seccion de entrambos.

Fig. 41. En el plano AB del punto E tirese vna perpendicular al plano AC: digo, que esta cairà en la comun seccion A. Porqne si no es assi, cayga si es possible como la EF, y en el plano AB del punto E tirese la EG perpendicular a la comun seccion AD, (a) 4. def. 11 serà (a) la AG perpendicular al plano AC: luego del punto E se podràn tirar dos perpendiculares al plano AC lo que no puede ser: (b) luego si vn pla- (b) 6. p. 11. no, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA 34. PROPOSICION 39.

Si los lados de los planos opuestos en vn paralelepipedo se cortan en dos partes iguales, y por las secciones se tiran planos, la comun seccion destos planos, y el diametro del paralelepipedo, se cortan mutuamente en dos partes iguales.

Fig 42. En el paralelepipedo AB de los planos opuestos AC, BD cortense en partes iguales todos sus lados en los puntos I, K, L, M, N, O, P, Q, y por las secciones passen los dos planos IN, KO, de quienes la comun seccion es la RS, y el diametro del paralelepi-

pe-

pedo la AB: digo, que las rectas AB, y RS se cortan mutuamente en dos partes iguales en el punto T. Tirense las rectas RB, RD, SA, SC; y porque en (a)
los triangulos AQS, COS los dos lados CO, OS de 34. P. 1.
el vno son iguales (a) a los lados AQ, QS del otro, (b)
y los angulos (b) AQS, COS iguales, seràn (c) las 29. P. 1. (c)
bases AS, CS iguales, y los angulos ASQ, CSO 4. P. 1.
iguales; pero los dos angulos ASQ, ASO son igua- (d)
les (d) a dos rectos: luego los dos ASO, CSO son Cor. 15.
tambien iguales a dos rectos: luego (e) las AS, CS P. 1. (e)
componen vna linea recta. Por la misma razon la 14. P. 1.
BRD es vna linea recta: y porque las rectas AD,
BC son (a) paralelas, y iguales a la recta FH son (f)
tambien (f) paralelas, y iguales entre si: luego las 9. P. 11.
AC, BD (g) son iguales, y paralelas, y sus mitades (g) 33. P. 1.
AS, BR tambien iguales. Y por quanto las AC, (h)
BD son paralelas: luego (h) las rectas, AB, RS es- 7. P. 11.
tàn en vn mismo plano con las dichas paralelas, y se cortaràn en el punto T. Y porque en los triangulos AST, BRT los angulos alrernos AST, BRT (b) son iguales, y tambien los verticales ATS, BTR, y los lados AS, BR estàn demostrados iguales: luego (i) los lados BT, AT, y los TS, TR son (i)
tambien iguales entre si, que es lo que se avia de 26. P. 1.
demostrar.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que en vn paralelepipedo, todos los diametros se cortan por medio en vn punto, como el punto T.

THEOREMA 35. PROPOSICION 40.

Dos prismas triangulares de igual altura, de los quales el vno tenga por base vn paralelogrammo, y el otro vn triangulo, y el paralelogrammo sea duplo del triangulo, son iguales entre si.

Fig 43. De los prismas *ABCDEF, GHIKLM* de igual altura, el primero tenga por base el paralelogrammo ABCD duplo del triangulo GHI, que es la base del otro prisma: digo, que los dos prismas son iguales entre si. Cumplanse los paralelepipedos *AN*, *GQ*, alargando los planos de los triangulos, y cumpliendo los paralelogrammos BN, AO, GP, MQ, y tirando las rectas NO, PQ, quedaràn formados los dos paralelepipedos AN, GQ de vna misma altura con los prismas. Y porque el paralelogrammo GP es duplo (a) del triangulo GHI, como el paralelogrammo AC lo era por la suposicion: luego los paralelogrammos *AC*, y GP (b) son iguales entre si: luego los paralelepipedos *AN*, *GQ* son iguales (c) entre si sobre iguales bases, y en vna misma altura; pero los prismas propuestos (d) son mitades destos paralelepipedos [porque estàn cortados por las diagonales *CF*, *DE*, y HI, KL:] luego los prismas propuestos son iguales entre si, que es lo que se avia de demostrar.

(a) 41. P. 1.
(b) 6. ax. 1.
(c) 31. P. 11.
(d) 32. P. 11.

SCHO-

SCHOLIO

De lo demostrado se sigue la dimension de los prismas triangulares, y quadrangulares, ò paralelepipedos: conviene a saber, si la base se multiplica con la altura, el producto es la solidez del prisma. Porque como el paralelogrammo rectangulo, assi el paralelepipedo recto se produce por la multiplicacion de la base con su altura: luego tambien se producirà qualquier otro paralelepipedo constituido sobre la misma base, y en la misma altura. Y los prismas que son mitades de sus paralelepipedos se produciràn multiplicando el triangulo [que es la mitad de la base de su paralelepipedo] con la misma altura.

FIN DEL LIBRO ONZENO.



LIBRO DOZENO

DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EVCLIDES.

DEFINICIONES.

1. PYramide es vn ſolido contenido de triangulos, que concurren en en vn punto, y nacen de vn miſmo plano, que es la baſe de la pyramide.

Fig. 1. *Como el ſolido ZL, que eſtà contenido de los triangulos ALC, CLF, FLB, BLA, que concurren en el punto L, y ſalen del plano Z. El plano Z ſe llama baſe, y puede ſer triangulo, ò quadrangulo, ò qualquier otra figura, de cuyos lados nacen los triangulos que concurren en el punto L, el qual ſe llama vertice.*

La pyramide es el ſolido primero, y el mas ſimple entre los cuerpos, como el triangulo entre las figuras planas rectilineas.

2 Si fuera del plano de vn circulo ſe toma vn punto, y deſde èl ſe tira vna recta tangente de dicho circulo, la qual linea dè vna buelta entera al derredor del circulo, quedando el punto tomado im-

immoble: la superficie formada desta recta es la superficie conica, y el solido contenido della, y del circulo se llama cono.

Como el solido ACL, que se forma, tomando el punto A fuera del circulo CL, y tirando la recta AF tangente del circulo, y moviendola al derredor del circulo hasta que dè vna buelta entera, quedando el punto A inmoble, y la recta AF siempre tangente del circulo CL. Fig.1.

El vertice *del cono es el punto A. La* base *es el circulo CL. El* exe *del cono es la recta AB tirada desde el vertice al centro de la base.*

El lado *del cono es la recta AC tirada desde el vertice a la circumferencia de la base, y està entera en la superficie del cono, como es manifiesto de su formacion.*

Cono recto *es quando el exe AB es perpendicular a la base.* Cono escaleno *es quando el exe AB es obliquo a la base, ò no perpendicular.*

El cono recto *tambien se forma de vn triangulo rectangulo, como del triangulo CBA, moviendole al derredor de vn lado perpendicular, hasta que dè vna buelta entera; y si la recta AB es igual a la CB, llamase el cono rectangulo: si la AB es menor, que la CB, llamase obtusangulo, ò amblygonio: si la AB es mayor que la CB, llamase acutangulo, ò oxygonio, y està denominacion toman del angulo CAL.*

3. Vn cilindro se forma quando al derredor de dos circulos iguales, y paralelos, vna linea recta diere vna buelta entera, quedando siempre paralela a si misma: la superficie descripta de

5 Esphera es vn solido contenido de vna sola superficie dentro de quien ay vn punto, desde el qual todas las rectas que se tiran hasta la superficie, son iguales entre si.

Aquel punto se llama centro.

Diametro *de la esphera es la linea recta, que se tira por el centro hasta la superficie de ambas partes.*

La esphera se forma quando vn semicirculo dierе vna buelta entera sobre su diametro inmoble.

6. Las magnitudes que estàn inscriptas, ò circumscriptas en alguna figura [*esto es menores, ò mayores que la figura*] se dizen terminarse, ò degenerar en ella, quando se pueden diferenciar della en cantidad menor que qualquiera dada, ò propuesta.

Lo que quiere dezir esta definicion es, que dadas dos qualesquiera magnitudes, vna inscripta, y otra dentro de quien està inscripta: si la inscripta se puede ir acercando mas, y mas a aquella, dentro de quien està inscripta, sin que jamàs se pueda determinar cantidad, vltra de la qual no pueda todavia acercarse mas, y assi en qualquiera suposicion la diferencia entre la inscripta, y la magnitud en quien lo està, pueda ser siempre menor que qualquiera diferencia determinada, ò dada, entonces la figura inscripta se dize terminarse en aquella en quien se inscribe, ò degenerar en ella.

Lo mismo se debe entender de la circumscripta, disminuyendo el excesso que tiene sobre la figura a quien se circumscribe, assi como la inscripta puede ir disminuyendo el defecto conque se diferencia de ella.

THEOREMA 1. PROPOSICION 1.

Los polygonos ſemejantes inſcriptos en circulos tienen duplicada la razon de ſus diametros.

Fig. 5. En los circulos ABO, ILR eſtèn inſcriptos ſe-
mejantes polygonos; tirenſe las rectas AO, BF, IR,
LC, y los diametros AF, IC: digo, que los polygo-
nos tienen duplicada la razon de los diametros AF,
IC. Porque por ſer los polygonos ſemejantes, ſeràn
(a) (a) los angulos OBA, RLI iguales, y los lados OB,
1.def.6. BA proporcionales a los lados RL, LI: luego en dos
(b) 6.P.6. triangulos (b) OAB, RLI, los angulos AOB, IRL
(c) ſon tambien iguales, que inſiſten a los arcos BA, LI:
21.P.3. luego (c) los angulos BFA, LCI ſon tambien igua-
les, que inſiſten ſobre los miſmos arcos BA, LI; pe-
(d) ro los FBA, CLI ſon (d) rectos: luego (e) los reſi-
31.P.3. (e) duos BAF, LIC ſon tambien iguales, y los triangu-
32.P.1. (f) los FBA, CLI ſon equiangulos, (f) y ſemejantes:
4.P.6. luego es como la BA a la LI, aſſi la AF a la IC, y (g)
(g) las duplicadas razones deſtas tambien ſeràn igua-
34.P.5. les; pero porque los polygonos ſon ſemejantes por
(h) la ſupoſicion, tendràn (h) duplicada la razon de
22.P.6. los lados BA, LI: luego la tendràn tambien dupli-
cada de los diametros AF, IC, que es lo que ſe avia
de demoſtrar.

CO-

COROLARIO.

Los ambitos de los polygonos semejantes inscriptos en circulos tienen entre si la misma proporcion que los diametros. Porque està demostrado que la AB a la LI es como la AF a la IC, y tambien como la OB a la RL, assi la AF a la IC, y de la misma manera los demàs lados: luego (i) todos los lados juntos del vno a todos los lados juntos del otro, esto es el ambito, ò perimetro al ambito, ò perimetro, es como el diametro AF al diametro IC, que es lo que, &c. (i) 12. P. 5.

L E M M A.

Los polygonos inscriptos en vn circulo se terminan en èl.

En el circulo ABC inscribase el quadrado ABCD, que (a) es la mitad del quadrado circumscripto: luego el quadrado inscripto es mas que la mitad del circulo; y si el quadrado inscripto se quita del circulo, se quitarà del circulo mas que su mitad. Partanse todos los arcos por medio en los puntos (b) E, K, I, H, y inscribase vn octogono en el circulo, y la recta FG toque al circulo en el punto E, alarguense las DA, BC, y serà CF vn paralelogrammo, cuya mitad (c) es el triangulo CEA: luego (d) este triangulo es mas que la mitad del segmento CEA. De la misma suerte se demuestra, que todos los triangulos AKD, DIB, &c. son mas que las mitades de los segmentos: luego todos los triangulos juntos son mas que la mitad de todos los segmentos juntos: luego si estos triangulos se quitan de los segmentos, se quita mas que la mitad de aquel residuo; y de la misma manera inscribiendo en

Fig. 6. (a) Schol. 7. P. 4. (b) 30 P. 3. (c) 41. P. 1. (d) 9. ax. 1.

el circulo siempre nuevos polygonos de duplos lados, se quitarà del residuo siempre, mas que la mitad: luego quedarà finalmente vn residuo (e) menor que qualquiera cantidad propuesta, y los polygonos inscriptos se diferenciarā finalmēte del circulo con menor diferencia, que qualquiera propuesta: luego (f) los polygonos inscriptos, se terminan en el circulo, que es lo que se avia de demostrar.

(e) Lemm. 2. del Schol. 11. p. 6.
(f) 6. d. 5. 12

THEOREMA 2. PROPOSICION 2.

Los circulos tienen duplicada la razon de sus diametros.

Porque los polygonos semejantes que se pueden inscribir infinitamente en los circulos, siempre tienen (a) duplicada la razon de los diametros; pero (b) los polygonos que se pueden inscribir infinitamente en los circulos, se terminan en ellos: luego los circulos tienen tambien duplicada la razon de los diametros, como se demuestra en el siguiente porisma.

(a) 1. p. 12.
(b) Lem. ant.

PORISMA VNIVERSAL.

Si las magnitudes que se inscriben en dos figuras se terminan en ellas, la proporcion que tienen las inscriptas entre si, tienen tambien las figuras en quienes se inscriben.

En las figuras A, y B inscribanse algunas magnitudes

que

que puedan terminarse en ellas, y la proporcion que siempre tienen las magnitudes inscriptas sea la de X a Z: digo, que las figuras A, y B en quienes se inscriben las magnitudes tienen la misma proporcion que las magnitudes inscriptas, esto es la proporcion de X a Z.

R.
A. B. X. Z.
C. F.

Porque si la figura A a la B no tiene la razon de X a Z, lo primero, tenga la figura A a la B mayor razon que X a Z: luego otra cantidad como R menor (a) que la A tendrà a la figura B la misma razon que X a Z; y porque las magnitudes inscriptas se terminan en las figuras A, y B por la suposicion, podrà aver (b) algunas magnitudes inscriptas en las figuras A, y B, que se diferencien menos dellas, que la diferencia de la R a la A: sean las tales inscriptas C, y F: luego la C serà mayor que la R, porque la C se diferencia menos de la A, que la R de la misma A: luego la C tiene mayor razon (a) a la B, que la R a la misma B; pero como la R a la B, assi es la X a la Z, ò la C a la F por la suposicion: luego la C tiene mayor razon a la B, que la misma C a la F: luego (c) la B es menor, que la F, la figura menor que la magnitud inscripta, lo que (d) no puede ser.

(a) 8. P. 5.
(b) 6. def 12
(c) 10. P. 5.
(d) 9. ax. 1.

Lo segundo, tenga la figura A a la B menor proporcion que la X a la Z: luego la A a otra cantidad como R menor (a) que la B tendrà la misma razon que la X a la Z, y sean las magnitudes C, y F inscriptas que se diferencien menos de las figuras A, y B, que la R de la B: luego la F es mayor que la R, y tendrà la A a la menor (a) R mayor razon, que la misma A a la mayor F; pero como la A a la R, ò X a Z,

assi se supone la C a la F: luego la C a la F tendrà mayor razon que la A a la misma F, y serà la C mayor (e) que la A, la magnitud inscripta mayor que la figura en que se inscribe, lo que no puede ser: luego la figura A a la B, ni tiene mayor, ni tampoco menor razon que la X a la Z: luego estàn en vna misma razon, que es lo que se avia de demostrar.

(e) 10. P. 5.

PROPOSICION 3, y 4.

Sirven para demostrar la quinta, la qual se demostrarà sin ellas con mas facilidad.

LEMMAS PARA LA PROPOSICION 5.

LEMMA 1.

Si dos pyramides triangulares se cortan con planos paralelos a las bases, dividiendo sus lados en partes proporcionales, las secciones tienen entre si la proporcion que las bases.

Fig 7. *Las pyramides triangulares AFBC, ILVQ cortense con los planos OSE, RXZ paralelos a las bases ABC, IVQ, y corten los lados CF, QL en partes proporcionales en los puntos E, y Z; digo, que la seccion OSE a la RXZ tiene la misma proporciō que la base ABC a la IVK. Porque los paralelos planos OSE, ABC estàn cortados de los planos BFC, AFB AFC: luego (a) las comunes secciones SE, BC, y SO, AB, y OE, AC son entre si paralelas, y los angulos (b) OSE, ABC, y SOE, BAC, y OES, ACB cada dos son iguales*

(a) 16. P. 11

(b) 10 P. 11.

entre

entre si: luego (c) *las secciones OSE, ABC son semejantes entre si. Por la misma razon las secciones RXZ, IVQ son semejantes entre si: luego* (d) *la base ABC a la seccion OSE tiene duplicada la razon del lado* BC *al lado* SE, *y la base IVQ a la seccion RXZ tiene duplicada la razon del lado VQ al lado XZ. Pero las razones de BC a SE, y de VQ a XZ son vna misma razon* [porq̃ la BC a SE (e) es como la CF a la EF, esto es como la QL a la ZL por la suposicion, ò (e) como la VQ a la XZ:] *luego* (f) *la razon de ABC a OSE tambien es la misma que la de IVQ a RXZ, porque son duplicadas de vna misma razon: luego si dos pyramides, &c. que es lo que se avia de demostrar.*

(c) 4. P. 6.
(d) 19. P. 6.
(e) 1. Cor. 4. 4. P. 6.
(f) 34. P. 5.

LEMMA 2.

Los prismas que infinitamente se inscriben en vna pyramide de base triangular, se terminan en ella.

De la pyramide ZCAF el lado AF cortese en algunas partes iguales, como AB, BG, GF, y por los puntos B, y G haganse las secciones GDN, BEP paralelas a la base ZAC, y sobre las secciones GDN, BEP imaginense en la pyramide inscriptos los prismas triangulares el vno BEPMAO [cuyos dos planos son los triágulos BEP, AOM paralelos iguales, y semejátes, y los otros son los paralelogrãmos BPMA, BEOA en la superficie pyramidal, y el paralelogrãmo EOMP, q̃està détro de la pyramide;] *y el otro prisma GDNKBQ* [cuyos planos

Fig. 8.

trian-

triangulares son GDN, BQK, y los otros los paralelogrammos GNKB, GDQB en la superficie pyramidal, y el interno DK.] *Alarguense estos prismas fuera de la pyramide, y imaginense a la pyramide circumscriptos los prismas CIBA, PXGB, NHFG, el excesso de los prismas circumscriptos sobre los prismas inscriptos, son los solidos IM, XK, HG, que todos juntos son iguales al*
(a) *prisma CIBA. Porque el HG es igual (a) al DB: luego*
25. P. 11 *HG, y XK juntos son iguales al PXGB; pero el PXGB es igual (a) al MEBA: luego los tres HG, XK, IM son iguales al prisma CIBA; pero si el lado AF se corta en mas, y mas partes iguales, y por consiguiente se multiplican infinitamente los prismas, quedará*
(b) *tamente los prismas, quedará (b) la AB menor que qual-*
2. Lemm. 11. P. 6. *quiera linea propuesta. luego (c) tambien el prisma CIBA*
(c) *será finalmente menor que qualquiera cantidad propuesta:*
25 P. 11. y 1. P. 6. *luego el excesso de los prismas circumscriptos* [y mucho mas de la pyramide ZCAF, que es menor que los prismas circumscriptos:] *sobre los prismas inscriptos será finalmente menor, que qualquiera cantidad propuesta:*
(d) *luego (d) los prismas inscriptos en la pyramide se terminan*
6. def. 11 *en ella, que es lo que se avia de demostrar.*

THEOREMA 5. PROPOSICION 5.

Las pyramydes triangulares de igual altura tienen entre si la proporcion que sus bases.

Fig. 9. De las pyramides QPAR, SZEX las lineas AP, EZ representen la altura igual: digo, que es como

la

la base QRA a la base SXE, assi la pyramide QPAR a la SZEX. Cortense las alturas AP, EZ en qualquier numero de partes iguales en entrambas, y por los puntos de las divisiones haganse secciones paralelas a las bases, y imaginense sobre las secciones inscriptos prismas triangulares en igual numero, y en igual altura en entrambas pyramides. Y porq̃ los prismas LA, IE son de igual altura, serà (a) el prisma LA al prisma IE, como la base LOB a la base INK, esto es (b) como la base QRA a la base SXE. De la misma manera se demuestra, q̃ todos los prismas inscriptos en la pyramide QPAR a los prismas inscriptos en la pyramide SZEX tienen la misma proporcion que la base QRA a la base SXE: luego tambien (c) todos los prismas juntos inscriptos en la vna a todos los inscriptos en la otra son como la base a la base; pero los prismas inscriptos en las pyramides finalmente se terminan (d) en ellas: luego tambien (e) las mismas pyramides tienen la proporcion que la base QRA a la base SXE, que es lo que se avia de demostrar.

(a) 1. Cor. 34 p. 11.
(b) 1. Lemm. desta.
(c) 12. p. 5.
(d) 2. Lemm. ant.
(e) Por. vniv. 2. p. 12.

SCHOLIO

Las pyramides triangulares, que tienen entre si la proporcion que sus bases estàn en igual altura. Porque si no es assi, de la altura mayor se cortarà vna igual a la menor, y tirando desde el punto de la division lineas rectas a todos los

angulos de la base, serà como la base a la base, assi la pyra-
(f) 5.P.12. *mide(f) a la pyramide nueva; pero esta misma proporcion tie-*
ne a la pyramide entera que se cortò: luego la pyramide nueva
y la de quien se cortò son iguales entre si, la parte, y el todo, lo
que no puede ser.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que las pyramides triangulares iguales sobre bases iguales, tienen alturas iguales, y si tienen iguales alturas estàn sobre iguales bases, lo qual se demuestra como la conversa de las 30. y 31. P. 12

THEOREMA 6. PROPOSICION 6.

Qualesquiera pyramides de igual altura tienen entre si la proporcion que sus bases.

Sean las pyramides ABX, CFOZ de igual altu-
Fig. 10. ra: digo, que es como la base AB a la base CFO, assi
la pyramide ABX a la pyramide CFOZ. Resuel-
vanse las bases en los triangulos A, B, C, F, O, y las
(a) 5.P.12. pyramides en pyramides triangulares, serà (a) la
pyramide AX a la pyramide OZ, como la base A
a la base O, y la pyramide BX a la pyramide OZ,
como la base B a la base O: luego entrambas pyra-
mides juntas AX, y BX [*esto es la pyramide ABX*]
(b) son (b) a la pyramide OZ, como las bases A, y B
24.P.5. juntas a la base O. Por la misma razon la pyramide
ABX a la pyramide FZ es como la base AB a la ba-
se F: y la misma ABX a la ZC es como la base AB
a la

a la base C: luego (c) la pyramide ABX a todas tres juntas OZ, FZ, CZ [*esto es a la pyramide OFCZ*] tiene la proporcion que la base AB a la base OFC, que es lo que se avia de demostrar. (c) 24. P. 5.

SCHOLIO.

De aqui se sigue, que qualesquiera pyramides que tienen la misma proporcion que sus bases, tienen igual altura. Y los mismos corolarios de la quinta proposicion se demuestran de esta con la misma demonstracion.

THEOREMA 7. PROPOSICION 7.

Qualquier pyramide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base, y altura con ella.

Lo primero, sea la pyramide BGAC, que tiene por base el triangulo BAC, y el prisma BAC,OEF sobre la misma base BAC, y en la misma altura con la pyramide: digo, que la pyramide BGAC es la tercera parte del dicho prisma: Tirense en los tres paralelogrammos tres diametros, conviene a saber en el BOFC el BF en el ABOE el AO, y en el ACFE el AF, y seràn (a) los triangulos BFC, BFO iguales, y tambien los OBA, OEA iguales entre si: luego la pyramide BFCA [*cuya base es el triangulo BFC*, *y los otros triangu-* Fig. 11. (a) 34. P. 1.

 los

(b) *los BAF, FAC, BAC concurren en el vertice A:*] es igual
5 P. 12. (b) a la pyramide BOFA [*cuya base es el triangulo BOF, y los otros OAF, OAB, BAF concurren en el vertice A, y la perpendicular desde el vertice A sobre el plano BOFC es la altura de entrambas pyramides.*] Por la misma razon la pyramide OEAF [*cuya base es el triangulo OEA, y los otros OFE, OFA, EFA concurren en el vertice F*] es igual a la pyramide OBAF [*cuya base es el triangulo OAB, y los otros OAF, BOF, BAF concurren en el vertice F, y la perpendicular desde el vertice F sobre el plano BQFC es la altura de entrambas pyramides.*] Pero la pyramide OBAF es la misma con la BOFA, porque estàn contenidas de los mismos triangulos: luego las pyramides BFCA, y OEAF tambien son iguales entre si, y todas tres BFCA, OEAF, OBAF, ò BOFA son iguales entre si: luego todas tres juntas son triplas de la vna BFCA; pero ellas tres juntas componen el prisma BACFO: luego el prisma es triplo de la pyramide BFCA, ò (b) de su igual BGAC.

Fig. 12. Lo segundo, dese qualquiera otra pyramide que tenga la misma base, y la misma altura cō el prisma AEFH. Tirense las rectas BC, BO, BE, y las NI, NG, NH, y resuelvase el prisma en prismas triangulares, y la pyramide en pyramides triangulares, cada pyramide serà la tercera parte de su prisma, como està demostrado: luego todas las pyramides juntas, esto es la pyramide propuesta es la tercera

par-

parte del prisma AEFH, que es lo que se avia, &c.

SCHOLIO.

De aqui se sigue, que qualesquiera prismas de vna misma altura, son entre si como las bases. Porque las pyramides sobre las mismas bases, y en la misma altura con los prismas, son terceras partes de los prismas: luego es (c) *como la pyramide a la pyramide, assi el prisma al prisma; pero* (d) *las pyramides son entre si como las bases: luego los prismas tambien son entre si como sus bases.* (c) 15. P. 5. (d) 6. P. 12.

COROLARIO.

Prismas iguales sobre bases iguales estàn en vna misma altura: y prismas iguales de igual altura estàn sobre bases iguales, porque esto està demostrado (e) de las pyramides, que son las tercias partes de los prismas. (e) Schol. 6. P. 12.

THEOREMA 8. PROPOSICION 8.

Semejantes pyramides tienen triplicada la razon de sus lados homologos.

Lo primero, sean las pyramides OACB, KHIN semejantes, y los lados AB, HN homologos, y las bases ACB, HIN triangulares: digo, que la pyramide OACB a la pyramide KHIN tiene triplicada la razon del lado AB al lado HN. Cumplanse los paralelogrammos AM, HQ, y sobre ellos erijanse los paralelepipedos AG, HL en la misma altura con las pyramides; y por ser las pyramides semejantes, tambien los paralelepipedos seràn semejantes; Fig. 13.

(a) 9.def.11 tes; porque (a) en las pyramides femejantes feràn femejantes los triangulos OAB, KHN, y los angulos OAB, KHN iguales, y los lados OA, AB proporcionales a los lados KH, HN: luego los paralelogrammos AF, HP fon femejantes. Por la mifma razon todos los demàs paralelogrammos de los dos paralelepipedos fon femejantes. Tirenfe las diagonales EF; RP, y por las rectas EF, CB, y RP, IN
(b) 28.P.11 tirenfe los dos planos *EB*, RN, y quedaràn (b) cortados los paralelepipedos en dos prifmas iguales,
(c) 7.P.12. de quienes cada vno es triplo (c) de las pyramides *OACB, KHIN*: luego entrambos prifmas juntos, que fon los paralelepipedos AG, HL fon fextuplos
(d) 15.P.5. de las pyramides: luego es (d) como el paralelepipedo AG al HL, affi la pyramide *OACB* a la
(e) 33.P.11 KHIN; pero los paralelepipedos (e) tienen triplicada la razon de los lados *AB, HN*: luego las pyramides OAC*B*, KHIN tienen tambien triplicada la razon de los lados A*B*, HN.

Fig.14. Lo fegundo fean las pyramides femejantes polygonas, y refuelvanfe en las triangulares AR, *B*R, CR, y OK, EK, FK, y ferà la AR femejante a la OK, y la *B*R a la EK, y la CR a la FK. Porque el
(f) 20.P.6. triangulo *A* es femejante (f) al triangulo O, y el *B* al E, y el C al F, y los triangulos de la pyramide *A*R fon femejantes a los triangulos de la pyramide
(g) 5.P.6. OK (g) porque todos los lados de los vnos fon proporcionales a los lados de los otros, por fuponerfe

las

pyramides enteras semejantes. Lo mismo es de las otras pyramides; y por quanto la pyramide AR es semejante a la OK: luego la AR a la OK tiene triplicada la razon del lado IM al PZ, como està demostrado; y la pyramide BR a la EK tiene triplicada la razon del lado MX al ZS, esto es del IM al PZ, que es vna misma por la suposicion, y la pyramide CR a la FK tiene triplicada la razon del lado XQ al ST, esto es del lado IM al PZ, que es vna misma por la suposicion. Y porque cada pyramide a otra tiene triplicada la razon del lado IM al PZ, tambien (h) todas juntas a todas juntas [*esto es la pyramide ABCR a la pyramide OEFK*] tienen triplicada la razon del lado IM al PZ, que es lo que se avia de demostrar. (h) 12. P. 5.

SCHOLIO

De aqui se sigue, que qualesquiera prismas semejantes tienen triplicada la razon de sus lados homologos. Porque las pyramides sobre las mismas bases, y en la misma altura con los prismas quedaràn semejantes; lo qual se demostrarà como en la proposicion, que si las pyramides son semejantes, tambien lo son los prismas; pero las pyramides (i) son las tercias partes de los prismas; luego es (k) como vna pyramide a otra, assi vn prisma a otro; pero las pyramides tienen triplicada la razon de sus lados homologos: luego tambien los prismas tienen triplicada la razon de los mismos lados homologos. (i) 7. P. 12. (k) 15. P. 5.

THEO-

THEOREMA 9. PROPOSICION 9.

Pyramides iguales tienen reciprocas las bases, y alturas: y las pyramides que tienen reciprocas las bases, y alturas, son iguales entre si.

Fig. 15. Lo primero, sean las pyramides BACO, HKNL triangulares, y iguales: digo, que es como la base BCO a la HNL, assi reciprocamente la altura HK a la altura BA. Cumplanse los paralelogrammos
(a) BE, HR, y sobre ellos erijanse los paralelepipedos
8. p. 12. BF, HP, que por ser sextuplos (a) de pyramides iguales por la suposicion, seràn iguales entre si; pero las alturas HK, BA destos paralelepipedos, y de las pyramides son vnas mismas por la suposicion, y
(b) las bases BE, HR son duplas (b) de las bases pyra-
34. p. 1. midales BCO, HNL, y proporcionales (c) a ellas.
(c) Y por quanto los paralelepipedos BF, HP son igua-
15. p. 5. (d) les: luego es (d) como la base BE a la HR, ò como
34. p. 11 la BCO a la HNL, assi reciprocamente la altura HK a la altura BA.

Lo segundo, si las pyramides tienen bases polygonas, reduzganse a trigonas con las mismas altu-
(e) tas, y seràn iguales (e) las pyramides trigonas a las
6. p. 12. polygonas; pero las pyramides reducidas reciprocan las bases, y las alturas, como està demostrado: luego tambien las pyramides polygonas reciprocan las bases [*que son iguales a las triangulares*] y las alturas.

Lo

Lo tercero, sean las bases reciprocas a las alturas: digo, que las pyramides son iguales. Porque por quanto la base BCO es a la HNL, como la altura HK a la BA será (f) tambien la BE a la HR, como la HK a la BA: luego los paralelepipedos (g) BF, HP son iguales: luego sus sextas partes, que son las pyramides BACO, HKNL son tambien iguales: luego pyramides iguales tienen, &c. que es lo que se avia de demostrar. (f) 15. p. 5. (g) 34. p. 11

SCHOLIOS

1 *De aqui se sigue, que qualesquiera prismas iguales tienen reciprocas las bases, y alturas; y si las tienen reciprocas, que son iguales. Porque las pyramides sobre las mismas bases, y en la misma altura tienen reciprocas bases, y alturas; pero (f) las pyramides son proporcionales a sus prismas, por ser las tercias partes dellos: luego los prismas tambien tienen reciprocas las mismas bases, y alturas.*

2 *Siguese lo segundo la dimension de qualesquiera prismas, y pyramides; la solidez de vn prisma se produce de su altura multiplicada por su base, y la de la pyramide por su base multiplicada por la tercera parte de su altura, ò al contrario.*

LEMMA PARA LA PROPOSICION SIGVIENTE.

Pyramides inscriptas infinitamente en los co-

nos, y prismas inscriptos infinitamente en los cilindros, se terminan en los conos, y en los cilindros.

Fig. 6. *Tenga vn cono, y vn cilindro por base el mismo circulo ABC, y vna misma altura; y en el circulo inscribase el quadrado ABCD, y circumscribase el MZ, si sobre estos quadrados se erijen prismas de igual altura con el cylindro, quedarà èl prisma sobre el quadrado ABCD, inscripto en el cilindro, y el otro sobre la base MZ, circumscripto al mismo*

(a) Schol. 7. P. 12. *cylindro, y serà (a) como la base a la base, assi el prisma al prisma; pero el quadrado inscripto es la mitad del circumscripto: luego el prisma inscripto es la mitad del prisma circumscripto: luego el prisma inscripto es mas que la mitad del cylindro, que es menor que el prisma circumscripto. Cortense por medio todos los arcos en los puntos E, K, &c. tirense las rectas AE, CE, &c. alarguense las BC, DA; y por el pun-*

(b) 41. P. 1. *to E tirese la tangente GF, serà (b) el triangulo ACE la mitad del paralelogrammo CF: luego el prisma sobre el triãgulo AEC es la mitad del prisma sobre el paralelogrammo CF, teniendo la misma altura con el cylindro: luego el prisma sobre el triangulo ACE es mas que la mitad del segmento cilindrico sobre el segmento CEA sobre la base contenida de la circumferencia CEA, y de las rectas CE, EA. Por la misma razon todos los demàs prismas sobre los demàs triangulos son mas que la mitad de los segmentos cylindricos; y inscribiendo polygonos de mas, y mas lados,*

(c) Lemm. 2. 11. P. 6. *se quitarà siempre mas que la mitad de los segmentos cylindricos residuos: luego (c) quedarà finalmente vn residuo*

(d) 6. def. 12 *menor que qualquiera cantidad propuesta: luego (d) los prismas*

mas inscriptos en los cilindros, se terminan en ellos.

De la misma suerte se demuestra de las pyramides. Porque si sobre la figura inscripta en el circulo se erije vna pyramide, y sobre la figura circumscripta al circulo otra, que concurran en el vertice del cono, la vna serà inscripta, y la otra circumscrita al cono, y siempre seràn (c) entre si como las bases, &c. (c) 6. P. 12.

THEOREMA 10. PROPOSICION 10.

Qualquier cono es la tercera parte del cilindro, que tiene la misma base, y altura.

El circulo CL sea base comun de vn cilindro, y de vn cono, que tengan qualquiera altura comun, y a la base CL inscribase vn polygono regular de qualesquierá lados en numero, y sobre este polygono, como base, inscribase al cono vna pyramide, y al cilindro vn prisma de la misma altura con el cono, y cilindro, serà (a) la pyramide la tercera parte del prisma: y si se inscribe en el circulo CL otro polygono de duplos lados mas, y sobre èl en el cono vna pyramide, y en el cylindro vn prisma, serà otra vez la pyramide la tercera parte del prisma; y esto serà siempre. Pero las pyramides (b) se terminan finalmente en el cono, y los prismas en el cylindro: luego el cono (c) tambien es la tercera parte del cilindro, que es lo que se avia demostrar. Fig. 16. (a) 7. P. 12. (b) Lem. ant. (c) Por. vnir 2. P. 12

THEOREMA 11. *PROPOSICION* 11.

Los conos, y cilindros de igual altura tienen la misma proporcion que sus bases.

Fig. 17. Sean los conos BAF, QXR de igual altura: digo, que tienen la misma proporcion que las bases CL, SE. Porque las pyramides inscriptas en los conos (a) 6 P. 12. de igual altura siempre tienen (a) entre si la proporcion que sus bases [*que son los polygonos inscriptos, y* (b) 1. y 2. P. 12. *tienen* (b) *entre si la misma proporcion que los circulos, que son las bases conicas;*] pero las pyramides (c) se termi- (c) Lemm. 9. P. 12. nan finalmente en los conos: luego (d) los conos tienen tambien entre si la misma proporcion que (d) Por. univ. las pyramides, que es la de la base CL a la base SE. (e) 10. P. 12 Y porque (e) los cilindros que tienen la misma base, y altura con los conos son triplos de los conos, (f) 15. P. 5. tambien los cilindros (f) tienen la misma proporcion que los conos, esto es; como sus bases: luego los conos, y cilindros, &c. que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIO.

1 De aqui se sigue lo primero, que los conos, y cilindros de igual altura, y sobre iguales, ó vna misma base, son iguales, ya sean rectos, ó escalenos, ó vno recto, y otro escaleno. Porque tienen la proporcion que sus bases, y estas se suponen iguales.

2 Lo segundo, que conos, y cilindros iguales sobre vna misma, ó sobre iguales bases, estàn en vna misma altura; y si estàn en vna misma altura, que tendràn vna misma, ò iguales bases, lo que se demuestra, como la conversa 31. P. 11.

Lo

3 Lo tercero, que los prifmas, y cilindros de igual altura, y qualesquiera cuerpos, que se producen de planos, y de vna misma altura, tienen entre si la proporcion que sus bases: esto es, como la base a la base, assi el prisma al cilindro. Lo mismo se entiende de pyramides, y conos de igual altura: *Veafe el 2, Schol.* 31, P. 11.

THEOREMA 12. *PROPOSICION* 12.

Semejantes conos, y cilindros tienen triplicada la razon de los diametros de sus bases.

Sean los conos BAF, QZR semejantes: digo, que tienen triplicada la razon de los diametros BF, QR. Lo primero sean los conos rectos, y en sus bases inscribanse polygonos regulares, que seràn (a) semejantes entre si, y sobre estos polygonos erijanse pyramides inscriptas, que tambien seràn semejantes, porque todos los lados de la vna seràn iguales (b) entre si, y tambien de la otra entre si, por ser sus quadrados iguales a los dos quadrados del exe AK, y del semidiametro KF, &c: luego los lados de los los triangulos de la vna, son proporcionales a los lados de los triangulos de la otra, y todos los triangulos de la vna son semejantes a los triangulos de la otra: luego (c) las pyramides son semejantes, y tienen (d) triplicada la razon de los lados homologos BL, QE, esto es (e) de los diametros BF, QR, y esto serà siempre de qualesquiera pyramides inscriptas; pero (f) las pyramides se terminan en los conos: luego (g) los conos tienen tambien triplicada la

Fig. 17. (a) 1 def. 6. (b) 47. P. 1. (c) 9. def. 11 (d) 8. P. 12. (e) en las P. 12. (f) Lemm. 9. P. 12 (g) Por. vniv.

la

(h) la razon de los diametros BF, QR. Y por quanto
10. P. 12 los cilindros (h) son triplos de los conos, tienen
(k) (k) la misma proporcion.
15. P. 5.

Lo segundo, sean los conos obliquangulos, y sobre las mismas bases, y en la misma altura erijanse
(l) conos rectangulos, que seràn (l) iguales a los obli-
11. P. 12 quangulos: luego serà como vn cono recto al otro, assi vn obliquangulo al otro; pero los rectangulos tienen triplicada la razon, &c. luego semejantes conos, &c. que es lo que se avia de demostrar.

THEOREMA VNIVERSAL.

Qualesquiera solidos semejantes tienen triplicada la razon de sus lados homologos.

Sean los solidos ABC, DEF semejantes, que tengan bases polygonas, ò circulos AB, DE, y sean los lados homologos A, y D, y en los circulos estos mismos A, y D sean diametros, ò semidiametros. Haganse las A, D, H, K continuas proporcionales, tendrà (a) la base AB
(a)
20. P. 6. *a la base DE duplicada la razon* ABC. DEC. DEF.
ò 2. P. 12 *de A a D, esto es, serà la base* A. D. H. K.
AD a la base DE, como A a H:
sobre estas bases formense en la altura C los solidos ABC,
(b) *DEC, y tendrà (b) el solido ABC al solido DEC la misma*
2. Schol. *razon, que la base AB a la base DE; esto es, como A a H.*
31. P. 11 *Sobre la base DE formese tambien en la altura F el solido DEF, y serà (b) el solido DEC al solido DEF, como la*

altu-

altura C à la altura F, y en los cilindros (c) *como el exe C al exe F; esto es como A a D, ò como H à K por la suposicion: luego* (d) *el solido ABC al solido DEF tiene la misma razon, que A a K; esto es* (e) *triplicada del lado A a su homologo D, que es lo que se avia de demostrar.*

(c) 4.def.12
(d) 22.p.5.
(e) 10.def.5

THEOREMA 13. PROPOSICION 13.

Si vn cilindro se corta con vn plano paralelo a sus bases, los segmentos del exe son proporcionales a los segmentos del cilindro.

Fig.18.

Cortese el cilindro recto ABCD con el plano GH paralelo a las bases AB, CD, que corta el exe EF en el punto I: digo, que el cilindro AH al cilindro GC tiene la misma razon, que el segmento EI del exe al IF. Alarguese el cilindro ABCD a entrãbas partes, y en el exe EF alargado al segmento EI tomense partes iguales EK, &c. en qualquier numero, y al segmento IF otras partes iguales FM, &c. en qualquier numero, y por los puntos K M, &c. tirense los planos RP, SQ paralelos a los planos AB, CD, y seràn (a) los cilindros RB, AH sobre la misma base AB, y en iguales alturas EK, EI iguales entre si. Por la misma razon los cilindros GC, DQ son iguales entre si: luego el cilindro RH es igualmẽte multiplice del cilindro AH, como el exe IK del exe IE, y el cilindro GQ es igualmente

(a) Cor. 11. P.12.

mul-

multiplice del cilindro GC, como el exe IM del exe IF; pero si el exe IK es igual al exe IM, el cilin-
(b) 11.p.12 dro (b) RH es igual al cilindro GQ, y si mayor, es
(c) 6.def.5. mayor; si menor, es menor: luego (c) es como el exe EI al exe IF, assi el cilindro AH al cilindro GC, que es lo que se avia de demostrar.

Lo que se dize de los cilindros rectos, se entiende tambien de los escalenos, y la demonstracion es la misma.

THEOREMA 14. PROPOSICION 14.

Los conos, y cilindros sobre iguales bases tienen entre si la proporcion que las alturas.

Fig. 19. y 20. Los cilindros AR, CI estèn sobre iguales bases MQ, GH: digo, que es como la altura LZ a la altura SF [*ò como el exe al exe en los cilindros rectos, porque los exes son la altura dellos*,] assi el cilindro AR al cilindro CI. Del cilindro AR mas alto cortese el cy-
(a) lindro AO de la altnra LE, igual a la altura SF, y
11.p.12 seràn (a) los cilindros AO, CI iguales entre si; pe-
(b) ro (b) el cilindro AO al cilindro AR tiene la mis-
13.p.12 (c) ma proporcion que el exe, ò la altura LE, ó SF, su
7.p.5. igual, al exe, ò a la altura LZ: luego (c) el cilindro CI al AR tiene tambien la proporcion, que la altu-
(d) SF a la altura LZ: y por quanto los conos son (d)
10.p.12 (e) las tercias partes de los cilindros, tienen (e) la mis-
15.p.5. ma proporcion, que los cilindros, esto es la misma que las alturas: luego conos, y cilindros, &c. que es lo que se avia de demostrar.

SCHO-

SCHOLIO.

Si los conos, y cilindros son escalenos, erijanse sobre las mismas bases, y en las mismas alturas conos, y cilindros rectos, que seràn (f) iguales a los escalenos: luego los escalenos tendràn la misma proporcion que los rectos, esto es la misma que las alturas, como està demostrado. (f) 11. P. 12

COROLARIO.

Este Theorema tambien se demuestra de qualesquiera prismas, y pyramides. Porque qualesquiera prismas de igual altura son entre si (g) como las bases; y si vn prisma se corta con vn plano paralelo a sus bases, es como la base a la base (h) [*esto es como la altura a la altura, que son los lados de las bases en los prismas rectos,*] assi el prisma al prisma: de donde se sigue la misma demonstracion en los prismas, como en los cilindros. Y porque las pyramides (k) de igual altura con los prismas, son las tercias partes dellos, tienen la misma proporcion que los prismas, esto es como la altura a la altura. (g) Schol. 7. P. 12 (h) 25 P. 11 (k) 7. P. 12.

Esta proposicion se puede convertir desta manera.

Conos, cilindros, prismas, y pyramides, que tienen entre si la proporcion que sus alturas, estàn sobre iguales bases.

Porque si no es assi, siguierase, que la parte seria igual a su todo, y la demonstracion es la misma que en la conversa de la 31. P. 11.

THEOREMA 15. PROPOSICION 15.

Iguales cilindros, y conos tienen reciprocas las bases, y las alturas; y si las tienen reciprocas, son iguales.

Fig.20.y 21. Sean los cilindros AR, DF iguales entre si: digo, que es, como la base TV a la base QM, assi reciprocamente la altura LZ a la altura QC. Porque si las
(a) 11.P.12 alturas son iguales, las bases tambien (a) seràn iguales: luego las bases son reciprocas a las alturas. Y si las alturas son desiguales, de la mayor LZ cortese la LE igual a la QC, y sea el plano XEO, que corta al cylindro AR paralelo a la base AB. Y por quanto los cilindros AR, FD son igua-
(b) 7.P.5. les por la suposicion, tendràn al cilindro AO (b) vna misma proporcion; pero el cilindro FD al AO tiene (a) la proporcion que la base TV a la QM, y
(c) 13.P.12 el cilindro AR al AO tiene (c) la proporcion, que
(d) 11.P.5. la altura LZ a la LE, ò a su igual QC: luego (d) tambien es como la base TV a la base QM, assi la altura LZ a la altura QC.

Lo segundo, sean las bases, y alturas reciprocas: digo, que los cilindros son iguales. Porque como la base TV a la base QM, assi la altura LZ a la altura QC, ò a su igual LE por la suposicion; pero (a) como la base TV a la base QM, assi es el cilindro FD al cilindro AO, y como la altura LZ a la altura LE (c) assi es el cilindro AR al cilindro AO: luego (d) los cilindros FD, y AR tienen vna misma proporcion al cilindro AO: luego (e) son iguales entre si.

(e) 9.P.5. *Lo mismo se entiende de los conos, que son las tercias partes de los cilindros, y tienen* (f) *la misma proporcion que los*
(f) 15.P.5. *cilindros.*

De

De la misma manera, si los cilindros, y conos fueren escalenos, tendràn la misma proporcion que los rectos sobre las mismas bases, y en las mismas alturas.

THEOREMA VNIVERSAL.

Si quatro cantidades son proporcionales, el producto de las extremas es igual al producto de las medias; y si de quatro cantidades el producto de las extremas es igual al producto de las medias, las quatro cantidades son proporcionales.

De lineas rectas està demostrada esta proposicion en el libro sexto.

Seanlas quatro cantidades A, B, C, D proporcionales, y sean las dos A, B superficies; y las otras dos C, D rectas, ò al contrario: digo, que el producto AD de las extremas, es igual al producto BC de las medias. Hagase de la primera A, y de la tercera C el producto AC, y serà (a) el producto AC al producto BC, como la A a la B: de la misma manera serà el producto AC al producto AD, como la C a la D, esto es como la A a la B por la suposicion: luego el producto AC tiene la misma proporcion a los dos productos BC, y AD: luego (b) los productos BC, y AD son iguales entre si.

BC. AD.
AC.
A. B. C. D.

(a) 2. Schol. 31. P. 11

(b) 7. P. 5.

Sean lo segundo los productos BC, AD iguales entre si: digo, que las quatro cantidades A, B, C, D son proporcionales. Porque si no son proporcionales sea como A a B, assi C

a E, y serà el producto BC igual al producto AE, como està
(c) 1. ax. 1. *demostrado: luego (c) el producto AE serà igual al producto*
(d) 2. Schol. 31. P. 11 *AD, lo (d) que no puede ser: luego si quatro cantidades, &c. que es lo que se avia de demostrar.*

De aqui quedan demostradas las prop. 14. 15. 16. 17. del lib. 6. y todas las proposiciones que tratan de solidos iguales, los quales tendran reciprocas las bases, y las alturas: y si las tienen reciprocas, seran iguales: como son los prismas, pyramides, cilindros, y conos.

SCHOLIOS.

1 Vn cilindro a otro, y vn prisma a otro tienen la razon compuesta de las razones de sus bases, y alturas.

Fig. 20. y 21. *Sean los cilindros FD, y AR, y del mas alto AR cortese el AO de igual altura con el FD, y sea como la base TV a la base MQ, assi TN a X, y como la altura ND, ò su igual BO a la altura BR, assi X a Z: digo, que el cilindro FD al AR tiene la razon que FN a Z. Porque el cilindro*
(a) 11. P. 12 *FD al AO tiene la razon (a) que la base TV a la base MQ, esto es, que FN a X por la construccion; pero el cilin-*
(b) 13. P. 12 *dro AO al AR tiene la razon (b) que BO, ò su igual ND*
(c) 22. P. 5. *a BR, esto es que X a Z, por la construccion: luego (c) por la igualdad el cilindro FD al AR tiene la razon que FN a Z, que es la compuesta de las intermedias razones propuestas.*

1 *De la misma manera se demuestra de los prismas por el Schol. 7. P. y el Cor. 14. P. 12.*

(d) 7. y 10. P. 12. 2 *Vn cono a otro, y vna pyramide a otra tienen la razon compuesta de sus bases, y alturas. Porque son (d) son las tercias partes (d) de cilindros, y prismas.*

PRO-

PROPOSICION 16. Y 17.

Estas dos Proposiciones sirven solamente para demostrar la 18. la qual se demuestra sin ellas por otro modo mas facil.

LEMMA PARA LA PROP. SIGVIENTE.

Los cilindros inscriptos en vn emispherio, se terminan en èl.

De vn emispherio sea el maximo semicirculo PZY, y su radio AZ perpendicular al diametro PY. Cortese el radio AZ en algunas partes iguales, como AM, MN, NZ. Y por los puntos M, N tirense perpendiculares al radio AZ, y inscribanse en el semicirculo los rectãgulos OBRK, EDHS, y continuandolos fuera del circulo, circumscribanse al semicirculo los rectangulos FT, YP, LVBO, QXDE, que todos seràn de vna misma altura por la construccion; pero el excesso de los rectangulos circumscriptos sobre los inscriptos son los planos FK, LS, XE, VH, TR, que todos juntos componen el rectangulo FTYP. Porque el XE es igual al DS: luego los tres LS, VH, XE juntos son iguales al rectangulo LB, ò al OR su igual, y añadiendo a entrambas partes los planos FK, TR, quedaràn los FK, LS, XE, VH, TR juntos iguales al rectangulo FTYP. Y si se concibe, que el semicirculo con los rectangulos dà vna buelta entera sobre el radio AZ immoble, los rectangulos inscriptos formaràn cilindros inscriptos en el emispherio, y los rectangulos circumscriptos formaràn cilindros circumscriptos al mismo emispherio, y los vnos insistiràn a los otros: Fig.22.

y

y como el excesso de los rectangulos circumscriptos sobre los inscriptos, es el rectangulo FY: de la misma manera el ex-
(a) 11.P.12 *cesso de los cilindros circumscriptos sobre los inscriptos* (a)
(b) *es el cilindro formado del rectangulo FY; pero la altura* (b)
Lemm.2. 11.P.6. *deste cilindro podrà ser finalmente menor que qualquiera*
(c) *propuesta: luego tambien este mismo cilindro* (c) *podrà ser*
13.P.12 *finalmente menor que qualquiera cantidad dada, ò propues-ta, si el radio AZ se corta en menores, y menores partes iguales, y se multiplican los rectangulos, y cilindros: luego el excesso de los cilindros circumscriptos* [y mucho mas del emispherio, que es parte dellos] *sobre los cilindros inscriptos serà finalmente menor, que qualquiera cantidad*
(d) 6.def.12 *dada, ò propuesta: luego* (d) *los cilindros que infinitamente se pueden inscribir en vn emispherio se terminan en èl, que es lo que se avia de demostrar.*

THEOREMA 16. PROPOSICION 18.

Las espheras tienen triplicada la razon de sus diametros.

Fig.23. Dense las espheras, cuyos diametros BK, RZ: digo, que tienen triplicada la razon de los diametros BK, RZ. Partanse los radios AB, y R en qualesquiera partes iguales en numero, y en magnitud, y por los puntos de las divisiones tirense perpendiculares a los radios AB, y R, y en los semicirculos maximos de las espheras imaginense inscriptos rectangulos en igual numero, que dando buelta sobre

bre los radios (a) AB, YR inmobles en entrambos emispherios, formaràn cilindros en igual numero, insistentes los vnos a los otros; y porque es (b) como la KC a la CF, assi la CF a la CB, serà (c) la razon de la KC a la CB duplicada de la razon de la KC a la CF, ò de la CF a la CB. Assimismo la razon de la ZE a la ER es duplicada de la razon de la XE a la ER; pero como la KC a la CB, assi es la ZE a la ER por la construccion: luego (d) tambien es la CF a la CB, como la XE a la ER; pero como la CB a la CO, assi es la ER a la ES por la construccion: luego (e) por la igualdad es como la FC a la CO, assi la EX a la ES: luego los cilindros (f) FL, XQ son semejantes, y tienen (g) triplicada la razon de los diametros FI, XV, ò (h) de los semidiametros FC, XE en sus bases; pero como la FC a la XE, assi es el diametro BK al diametro RZ; porque como FC a XE, assi la CO a la ES [*como està demostrado*] esto es, assi la BK a la RZ, que son igualmente multiplices de las CO, ES por la construccion: luego la razon (k) del cilindro FL al XQ es triplicada de la razon del diametro BK al diametro RZ. De la misma manera se demuestra, que cada vno de los demàs cilindros inscriptos en vna esphera a su correspondiente inscripto en la otra esphera tiene triplicada la razon de los diametros BK, RZ: luego tambien todos juntos los de vna esphera [l] a todos juntos los de otra esphera tienen triplicada

(a) 3. def. 12
(b) Cor. 13. P. 6.
(c) 10. def. 5
(d) 35. P. 5.
(e) 22. P. 5.
(f) 4 def. 12
(g) 12. P. 12
(h) 15. P. 5.
(k) 34. P. 5.
(l) 12. P. 5.

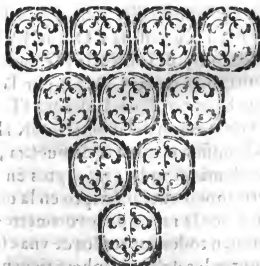
la

(m) *Lem. ant.* la razon de los diametros BK, RZ; pero los agregados de los cilindros (m) se terminan finalmente en

(n) *Por. univ.* los emispherios: luego los emispherios (n) y las espheras duplas de los emispherios tienen tambien triplicada la razon de los diametros, que es lo que se avia de demostrar.

COROLARIO.

Conocida la proporcion de los diametros de las espheras, quedarà conocida la proporcion de las mismas espheras: como si el diametro de esphera fuere de 1. pie, y el de otra de 10, la razon de 1 a 10. se continuarà por quatro terminos 1. 10. 100. 1000. y serà como 1 a 1000, assi la espera menor a la mayor.



APEN-

APENDIZ
DE ALGUNOS
THEOREMAS
DE PARALELEPIPEDOS, QVE RESVLTAN DE VARIAS SECCIONES DE VNA LINEA RECTA.

NVM. I.

Si vna linea recta se corta como quiera, el cubo de la entera es igual a los cubos de sus segmentos, y a seis solidos, de los quales cada tres se forman sobre el quadrado del vn segmento en la altura del otro, ò a tres solidos comprehendidos de la entera, y de sus segmentos.

Cortese la recta AB como quiera en el punto C: Fig. 24. digo, que el cubo de la entera AB es igual a los cubos de los segmentos AC, CB, y a seis solidos, tres de los quales se forman sobre el quadrado del segmento AC en la altura CB, y los ot os tres sobre el quadrado del segmento CB en la altura AC, ò a tres solidos contenidos de la AB, y de los segmentos AC, CB. Sobre el quadrado AE erijase su cubo, y cortese en la altura AC con vn plano paralelo a la base AE, serà el solido cortado sobre la base AE en la altura AC igual al cubo de la recta AC,

formado ſobre el quadrado HF a dos ſolidos formados ſobre los quadrados de la AC, y de ſu igual GF en la altura CG, y GI; eſto es en la altura CB, y al ſolido ſobre el quadrado CI en la altura AC; pero el reſiduo ſolido ſobre la baſe paralela, è igual a la AE en la altura CB es igual al cubo de la recta CB, al ſolido ſobre el quadrado paralelo, è igual al HF en la altura CB, y a otros dos ſolidos, cuyas baſes ſon los quadrados de iguales a las CG, y GI; eſto es el de la CB en alturas iguales a las AC, y GF ſu igual: luego el cubo de la AB es igual a los cubos de los ſegmentos AC, y CB a tres ſolidos ſobre el quadrado del ſegmento AC en la altura CB, y a otros tres ſobre el qnadrado del ſegmento CB en la altura AC. Y por quanto cada ſolido ſobre el quadrado de la AC en la altura CG [eſto es ſobre el rectangulo AG en la altura AC] con vn ſolido ſobre el quadrado de la CG, ò CB en la altura AC [eſto es ſobre el rectangulo paralelo, è igual al AG en la altura CB] componen el ſolido de las partes AC, y CG, ó CB en la altura AB: luego el cubo de la entera tambien es igual a los cubos de ſus ſegmẽtos, y a tres ſolidos contenidos de la entera, y de ſus ſegmentos, que es lo que, &c.

La primera parte deſte Theorema ſe propone en algebra deſta manera; El cubo de $A+B$ es igual al $A3+3A2B+3AB2+B3$: eſto es, el cubo de la ſuma A mas B [imaginando por A, y B dos lineas directamente pueſtas, ò dos numeros ſumados] es igual al cubo del A, mas a tres ſolidos ſobre el quadrado del A en la altura del B, mas a tres ſolidos ſobre el quadrado del B en la altura del A, mas al cubo del B.

NVM.

NVM. II.

El cubo del segmento AC, el solido sobre el quadrado de la AC en la altura CB, el solido sobre el quadrado de la CB en la altura AC, y el cubo de la CB son continuos proporcionales.

Porque el cubo de la recta AC sobre el quadrado HF, el solido sobre el quadrado de la AC en la altura CG, ò CB [esto es sobre el rectangulo AG en la altura AC,] y el solido sobre el quadrado CI en la misma altura *AC* tienen (a) entre si la proporcion que sus bases HF, AG, CI, que son continuas proporcionales (b) en la razon de la recta DH a la HA; esto es del segmento *AC* al segmento *CB*; y el solido sobre el quadrado *CI* en la altura AC al cubo de la *CB* tiene (c) tambien la misma proporcion, que la altura *AC* a la altura *CB*: luego el cubo del segmento A*C*, &c.

(a) 32. P. 11

(b) 1. P. 6.

(c) 2. Schol. 32. P. 11

NUM. III.

Dadas dos rectas desiguales, el cubo de la mayor con tres solidos sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor es igual a los cubos de la diferencia, y de la menor, y a tres solidos formados sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor.

Sea la recta AB mayor, y la *CB* menor: digo, q̄ el cubo de la recta AB con tres solidos formados sobre el quadrado de la *CB* en la altura *AB* es igual a los cu-

Fig. 24.

de la diferencia AC, y de la menor CB, y a tres solidos formados sobre el quadrado de la AB en la altura CB. Porque el cubo de la recta AB es igual (d) à los cubos de los segmentos AC, y CB [esto es de la diferencia AC, y de la menor CB] y a tres solidos formados de la entera AB, y de los segmentos AC, CB, ò de su igual CG; pero si a cada vno de estos tres solidos sobre el rectangulo AG en la altura AB se añade vn solido sobre el quadrado CI en la altura AB, resulta el solido sobre el rectangulo AI en la altura AB, esto es, vn solido sobre el quadrado de la AB en la altura BI, ó su igual CB: luego el cubo de la mayor AB con dichos tres solidos sobre el quadrado de la menor CB en la altura AB es igual a los cubos de la diferencia AC, y de la menor CB, y a tres solidos formados sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor.

(d) *num.* 1.

Este Theorema se propone en algebra desta manera: el cubo de $A - B$ es igual al $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$, esto es. el cubo de A menos B es igual al cubo del A, menos tres solidos sobre el quadrado del A en la altura del B. mas a tres solidos sobre el quadrado del B en la altura del A. menos el cubo del B. Quiere dezir, que si del cubo de la mayor, y de tres solidos formados sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor se quitan tres solidos sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor, y el cubo de la menor serà el residuo igual al cubo de la diferencia.

COROLARIOS.

1. De aqui se sigue lo primero, que el cubo de la suma de dos rectas desiguales, junto con el cubo de

de la diferencia de las mismas, es igual a dos cubos de la mayor, y a seis solidos sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor.

Porque para añadir al cubo de la suma de dos rectas [que es igual à los cubos de las rectas (a) propuestas a tres solidos sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor, y a otros tres sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor] el cubo de la diferencia de las mismas rectas, avrá de añadirle (b) al cubo de la suma el cubo de la mayor, y tres solidos sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor; pero avràn de quitarle del mismo cubo de la suma los tres solidos sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor, y el cubo de la menor: luego el agregado del cubo de la suma, y del de la diferencia de dos rectas desiguales es igual al duplo del cubo de la mayor, y de tres solidos formados sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor.

(a) num. 1.

(b) num. 3.

2 Siguese lo segundo, que el cubo de la suma de dos rectas desiguales excede al cubo de la diferencia de las mismas en seis solidos formados sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor, y en dos cubos de la menor.

Porque el cubo de la suma de dos rectas es igual (a) a los cubos de las rectas propuestas a tres solidos sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor, y a otros tres sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor; pero el cubo de la mayor con tres solidos formados sobre el quadrado de la menor en la altura de la mayor excede al cubo de la diferecia (b) en tres solidos sobre el quadrado de la mayor en la altura de la menor, y en el cubo de la menor: luego el cubo de la suma excede al cubo de la diferencia en seis solidos. &c.

Estos dos Corolarios se proponen en algebra desta manera; el primero.

El cubo de A ✢ B	A 3 ✢ 3 A 2 B ✢ 3 A B 2 ✢ B 3.
sumado con el cubo de A --- B	A 3 --- 3 A 2 B ✢ 3 A B 2 --- B 3.
es igual a	2 A 3 ✢ 6 A B 2.

El segundo:

Si del cubo de A ✢ B	A 3 ✢ 3 A 2 B ✢ 3 A B 2 ✢ B 3
se resta el cubo de A --- B	A 3 --- 3 A 2 B ✢ 3 A B 2 --- B 3
el residuo es igual a	6 A 2 B ✢ 2 B

NVM. IV.

Si vna linea recta se corta en dos partes iguales, y en dos desiguales, los cubos de las partes desiguales juntos son el duplo del cubo de la mitad, y de tres solidos formados sobre el quadrado de la intermedia en la altura de la mitad de la recta propuesta.

Fig. 25. Cortese la recta AB en dos partes iguales en el punto *C*, y en desiguales en D. digo, que los cubos de las partes desiguales AD, y DB juntos, son el duplo del cubo de la mitad A*C* junto con tres solidos formados sobre el quadrado de la intermedia *CD* en la altura de la mitad *AC*: Porque el cubo de
(e) la recta AD, ó de su igual EG es igual (e) a los cu-
Lem. 1. bos de los segmentos EF, FG, ò de sus iguales A*C*, *CD*, y a seis solidos, tres de los quales se forman sobre el quadrado FL en la altura EF, ò A*C*, y los
(f) otros tres sobre el rectangulo EK, ò su igual (f) FM
34. P. 6. en la misma altura A*C*, ò *CB*; pero cada solido sobre el rectangulo FM en la altura *CB* es igual a dos solidos, al vno sobre el quadrado FL, y al otro sobre el rectangulo GM [de las rectas LG, GH, ò de sus iguales *CD*, *DB*] en la altura *CB*: luego el cubo de la recta AD es igual a los cubos de las rectas *AC*, y *CD*, y a nueue solidos, seis de los quales se forman sobre el quadrado FL, y los otros tres sobre el rectangulo GM en la altura *CB*: añadase pues a entrambas partes el cubo de la BD, y quedarán

los

los dos cubos de las partes desiguales AD, y DB, iguales al cubo de la mitad *AC* a seis solidos sobre el quadrado FL en la altura *CB*, a los cubos de las *CD*, DB, y a tres solidos sobre el rectangulo GM en la altura *CB*; pero (g) los cubos de las *CD*, y DB con los tres solidos sobre el rectangulo GM en la altura *CB* son iguales al cubo de la *CB*, ò de su igual *AC*: luego los cubos de las partes desiguales AD, y DB juntos son iguales a dos cubos de la mitad *AC*, y a seis solidos sobre el quadrado FL de la intermedia *CD* en la altura *AC*; luego son el duplo del vn cubo de la *AC*, y de los tres solidos sobre el quadrado de la intermedia en la altura de la mitad de la recta propuesta. (g) *num. 1.*

Esta proposicion tambien està demostrada en el primer corolario del num. antecedente. Porque la recta AD està compuesta de las rectas AC, y CD, y la recta DB es la diferencia de las mismas AC (ò de su igual CB) y CD: luego el cubo de la suma AD junto con el cubo de la diferencia DB es igual a dos cubos de la mayor AC, y a seis solidos sobre el quadrado de la menor CD en la altura de la mayor AC.

NVM. V.

Si vna recta se corta en dos partes iguales, y en dos desiguales, y el cubo del menor segmento se quita del cubo del segmento mayor, el residuo es duplo del cubo de la intermedia, y de tres solidos sobre el quadrado de la mitad en la altura de la intermedia.

Porque el cubo del mayor segmento AD es igual (g) a los cubos de las *AC*, y *CD*, a tres solidos sobre *Fig. 24.*

el

quadrado de la AC en la altura CD, y a otros tres sobre el quadrado FL en la altura AC; pero si del cubo de la AC, ó de su igual *CB* se quita el cubo de la *DB*, el residuo es *(a)* el cubo de la CD, y tres solidos sobre el rectangulo GM en la altura *CB*, ó AC: luego si del cubo de la AD se quita el cubo de la *BD* el residuo es dos cubos de la *CD*, tres solidos sobre el quadrado de la *AC* en la altura *CD*, y tres sobre el quadrado FL, y otros tres sobre el rectangulo GM en la altura *AC*; pero los tres solidos sobre el quadrado FL con los otros tres sobre el rectangulo GM en la altura *AC* componen tres solidos sobre el rectangulo FM, ó sobre su igual EK en la altura *AC*, esto es sobre el quadrado de la *AC* en la altura FK, ó su igual *CD*: luego si del cubo del mayor segmento se quita el cubo del segmento menor, el residuo es el duplo del cubo de la intermedia *CD*, y de tres solidos sobre el quadradode la mitad *AC* en la altura de la intermedia *CD*, que es lo que se avia de demostrar.

(a) Cor. 2 n. 3

Este Theorema tambien està demostrado en el 2. corol del num. 3. Porque el cubo de la recta AD es el cubo de la suma de las rectas AC, CD, y el cubo de la DB es el cubo de la diferencia de las mismas rectas AC, CD: luego el cubo de la AD excede al cubo de la D*B* en dos cubos de la menor CD, y en seis solidos sobre el quadrado de la mayor AC en la altura de la menor CD.

NUM. VI.

Si vna linea recta se corta en dos partes iguales, y se le aña-

añade directamente qualquiera otra recta, los dos cubos, el de la toda con la añadida, como de vna, y el de la añadida juntos son el duplo del cubo de la recta compuesta de la mitad, y de la añadida, y de tres solidos sobre el quadrado de la mitad en la altura de la recta compuesta de la mitad, y de la añadida.

Cortese la linea recta AB en dos partes iguales en el punto C, y añadasele directamente qualquiera recta BD: digo, que los dos cubos el de la AD, y y el de la BD juntos son el duplo del cubo de la CD, y de tres solidos formados sobre el quadrado de la AC en la altura de la CD. Porque la recta AD es la suma de las rectas AC, CD, y la BD es la diferencia entre las mismas rectas CD, y AC (ò su igual CB:) luego (a) el cubo de la suma AD junto con el cubo de la diferencia BD es igual a dos cubos de la mayor CD, y a seis solidos sobre el quadrado de la menor AC en la altura de la mayor CD. *Fig. 26.* (a) 1 Cor. n. 3

Pero si el cubo de la recta BD (que es la añadida) se resta del cubo de la recta AD (que es la compuesta de la dada AB, y de la añadida BD) serà el residuo igual (b) a dos cubos de la menor AC, y a seis solidos sobre el quadrado de la mayor CD en la altura de la menor AC. (b) 2 Cor. n. 3

O por quanto el cubo de la AD es igual (c) a los cubos de las AB, BD, y a tres solidos contenidos de

 las

las AD, AB, BD: luego si del cubo de la AD se quita el de la BD, serà el residuo igual al cubo de la AB, y a tres solidos contenidos de las AD, AB, y BD.

N O T A.

Fig. 26. 1 Si vna linea recta como la EF se corta en dos partes iguales en el punto G, y en desiguales en el punto H, la intermedia GH es la semidiferencia entre las partes desiguales. Porque si a la HF se corta igual la EI, serà la IH la diferencia entre las EH, y EI, ó su igual HF: pero las GI, GH son iguales. &c.

Fig. 26. 2 Si vna linea recta como AC se corta en dos partes iguales en el punto B, y se le añade directamente qualquiera recta CP, serà la BP la semisuma de la recta AP (compuesta de la dada, y de la añadida) y de la CP. Porque si la MA se corta igual a la CP, serà MC igual a la AP, y la MP la suma de las AP, y CP: luego la BP es su mitad.

FIN DEL LIBRO DOZENO.



PRO-

PROPOSICIONES SELECTAS DE ARCHIMEDES DEMOSTRADAS

CON METHODO MAS FACIL, y mas breve, y aumentadas

POR EL P. ANDRES TACQUET DE la Compañia de Jesus

TRADUCIDAS, Y AÑADIDAS A LOS Elementos de Euclides.

AL LECTOR.



Unque han tenido las ciencias Mathematicas maravillosos, y consumados varones, se lleva la aclamacion, y la palma el grande Archimedes por el comun voto de todos; pero mas son los que le aplauden, que los que le leen, y mas los que le admiran, que los que le entienden; y es la causa la magnitud, y raridad de sus volumenes, y la necessaria obscuridad de la traduccion del Griego, con lo arduo, y dilatado de sus demonstraciones. Por tanto me pare-

pareciò que haria obsequio a los estudiosos, despues de explicados los Elementos, en añadir algunos de sus mas selectos Theoremas, demonstrandolos con methodo mucho mas facil, y breve. Escogi los mas admirables, y mas vtiles, esperando, que quien huuiere entendido los elementos, entenderà con poca dificultad estas singularissimas especulaciones del mayor de los Geometras. Añado al fin treze proposiciones en que amplifico la doctrina de Archimedes tocante à la esphera, y al cilindro; y entre otras cosas demuestro, que se continua la proporcion sesquialtero en los tres cuerpos Esphera, Cilindro, y Cono equilatera, ambos circumscriptos à la esphera. Assimismo añado otros diferentes Theoremas, principalmente la proposicion 12. los corolarios de la proposicion 14. y todos los Scholios. Siruanse deste mi trabajo los estudiosos de la Geometria, persuadidos à que en Archimedes haràn examen de lo que huvieren aprovechado en Euclides.

Hasta aqui el P. Tacquet en su Prologo.

Y porque hasta aora carecia el idioma Español deste tesoro Geometrico, no desmereciendole su elegancia, fuera agrauiarle, si le defraudassemos de obra de tanto ingenio, y agudeza: por tanto tuve por conveniente traducirla, y ofrecerla a los estudiosos de tan noble facultad; pero no ciñendome a las leyes de vna rigurosa traduccion, y assi vnas vezes me he dilatado en lo que juzguè demasiadamente conciso, y otras he añadido lo que se podia echar menos para la mayor claridad de sus demonstraciones.

DE

DEFINICIONES.

En el circulo BEGC, cuyo centro es el punto A, al diametro BC, tirese la perpendicular EG, que no passa por el centro, y corta al diametro BC en el punto D, y del centro A tirense los semidiametros AE, AG: esto supuesto, Fig. 28.

1 *Sector* de la esphera es el que se forma del sector del circulo AECG, ò del AEBG, quando el circulo da vna buelta sobre el diametro BC.

2 *Segmento*, ò porcion de la esphera es la que se forma del segmento circular ECG, ò EBG quando el circulo da vna buelta sobre el diametro BC.

3 *Vertice* del segmento espherico es el extremo punto B del diametro immobil BC. *Base* del mismo segmento espherico es el circulo descripto de la recta EG. *Exe* es la parte BD del diametro entre el vertice B, y el centro D de la base.

4 Quando se habla de la superficie de vna porcion espherica, ò de vn cuerpo inscripto en ella, ò de vn cono, siempre se entiende sin su base; y quando se habla de la superficie de vn cilindro, se entiende sin sus bases, si no es que se añade la palabra *total*, por que entonces se comprehenden tambien las bases: y quando se habla de cilindros, y conos, se deben entender los rectos.

AXIOMAS.

1 El ambito de qualquier poligono inscripto en vn circulo es menor que su circumferencia.

2 El ambito de qualquier poligono circumscripto à vn circulo es mayor que su circumferencia.

Fig. 21. 3 Si vn poligono inscripto en vn circulo dà buelta con el mismo sobre su diametro (AE) serà la superficie del cuerpo formado del poligono, menos que la superficie de la esphera; y si vn poligono circumscripto al circulo dà buelta con el mismo sobre su diametro, serà la superficie del solido formado del poligono, mayor que la superficie de la esphera.

Fig. 22. 4 El ambito de vn poligono inscripto en el segmento circular (DAF) es menor que la circumferencia (DAF.) Y si el poligono inscripto en vn segmento dà buelta con el mismo sobre su exe (AO) serà la superficie del cuerpo formado del poligono, menor que la superficie del segmento espherico (DAF.)

5 La superficie de vn prisma inscripto en vn cilindro es menor que la superficie del cilindro, y la del circumscripto mayor.

6 La superficie de vna pyramide inscripta en vn cono es menor que la superficie del cono, y la de la circumscripta mayor.

PROPOSICION I.

Dadas qualesquiera figuras planas, ò solidas A, y B, y dadas tambien otras magnitudes, que degeneren en las figuras A, y B, excediendolas siempre con menores, y menores excessos, quedando siempre entre si iguales: digo, que las figuras A, y B son tambien iguales entre si.

Porque si no son iguales, serà la vna mayor que la otra: y sea lo primero la A mayor que la B, y el excesso sea X. Y por quanto por la suposiciõ puede aver vnas magnitudes, v. g. E, y F iguales entre si, que excedan a las figuras A, y B con menor excesso que X, con que A excede à B: luego la magnitud F es menor que la A; pero F se supone igual a E: luego la E tambien es menor que la A, que es contra lo supuesto: luego la A no puede ser mayor que la B.

Sea lo segundo la B mayor que la A, y el excesso sea X; y las magnitudes E, F excedan a las A, y B con menor excesso que X: luego la E es menor que la B; pero la E se supone igual à la F: luego la F tambien es menor que la B, lo que es contra lo supuesto: luego la B no puede ser mayor que la A; esto es, la A no puede ser menor que la B; ni tampoco mayor: luego A, y B son iguales entre si.

PROPOSICION 2.

Dadas qualesquiera figuras A, y B, y dadas tambien otras magnitudes menores, que degeneren en las figuras A, y B, diferenciandose dellas siempre con menores, y menores defectos, y quedando siempre iguales entre si: digo, que las figuras dadas A, y B tambien son iguales entre si.

Porque si no son iguales, serà la vna dellas menor que la otra. Sea lo primero la A menor que la B, y el defecto sea Z: y porque por la suposicion puede aver magnitudes; v.g. O, y P iguales entre si, que tengan menor defecto de las propuestas, que el Z dellas, serà la P mayor que la A; pero la P es igual a la O por la suposicion: luego la O tambien serà mayor que la A, lo que es contra lo supuesto, porque la O se supone menor que la A: luego la A no puede ser menor que la B.

A. B. Z
O. P.

Sea lo segundo la B menor que la A, y el defecto sea Z, y las magnitudes O, y P, que tienen menor defecto de las A, y B, que el defecto Z: luego la O serà mayor que la B; pero la O es igual a la P por la suposicion: luego la P tambien es mayor que la B; lo que es contra lo supuesto: luego la B no puede ser menor que la A: luego las figuras A, y B son iguales.

PROPOSICION 3.

Los ambitos de los poligonos circumscriptos, y inscriptos degeneran en la circumferencia del circulo, y los poligonos degeneran en el circulo.

Inscribanse, y circumscribanse al circulo AB poligonos regulares, cortando siempre los arcos por mitades, y inscribiendo figuras de mas, y mas lados, y circumscribiendo otras; serà siempre (a) la FI a la EC [*y todo el ambito* (b) *del poligono circumscripto a todo el ambito del poligono inscripto*,] como la IA a la AC; pero el excesso IC con que la IA excede a la AC, serà finalmente menor que qualquiera recta propuesta, si se inscriben, y circumscriben poligonos de mas, y mas lados: luego el excesso del ambyto circumscripto sobre el inscripto serà tambien finalmente menor, que qualquier propuesto: luego (c) el excesso del ambyto circumscrito sobre la circumferencia serà mucho menor que qualquier propuesto. Assimismo, porque el defecto del ambyto del inscripto al circumscripto es finalmente menor que qualquier propuesto; como està demostrado: luego el defecto (c) del ambyto inscripto a la circumferencia serà finalmente mucho menor que qualquier propuesto: luego (d) los ambytos de los polygonos circumscriptos, y inscripros degeneran en la circumferencia del circulo. Y por que està

Fig. 1.
(a) Cor. 4. P. 6.
(b) 12. P. 5.
(c) 1. ax. d.
(d) 6. def. 12

demostrado, que el excesso del lado FI sobre el lado EC es finalmente menor que qualquier propuesto [*porque la FI a la EC es como la IA a la CA:*]
(e) 2.Lemm. 11.P.6. tambien (e) el excesso del quadrado de la FI sobre el quadrado de la EC será finalmente menor que
(f) 21.P.6. qualquiera propuesto; pero (f) como el quadrado de la FI al quadrado de la EC, assi es el poligono circumscripto al inscripto: luego el excesso del poligono circumscripto sobre el inscripto será tambien finalmente menor que qualquier propuesto: luego el excesso del poligono circumscripto, y el defecto del inscripto respecto del circulo será finalmente mucho menor que qualquier propuesto:
(g) 6.def.12 luego (g) los poligonos inscriptos, y circumscriptos degeneran en el circulo, que es lo que, &c.

Fig.2. La segunda parte tambien se demuestra desta
(h) Lemm.1. P.12. manera: está demostrado (h) que los polygonos inscriptos degeneran en el circulo, y los circumscriptos se demuestran degenerar en el mismo desta ma-
(i) 37.P.3. nera. Las tangentes LE, LA (i) son iguales entre
(k) 19.P.1. si; pero (k) la ML es mayor que la LE, porque el angulo MEL es recto: luego la ML tambien es mayor que la LA; y el triangulo MEL (l) es
(l) 1.P.6. mayor que el triangulo LEA: de la misma suerte el triangulo MEN es mayor que el NEC: luego el triangulo NML es mas que la mitad del quadrilatero MCEA, y mucho mas del espacio contenido de la circumferencia CEA, y de las

las rectas MC, MA. Y porque del quadrado circumscripto quitando el circulo se quita mas de la mitad, y de los residuos espacios partiendo los arcos por medio, y tirando tangentes se quita mas de la mitad, si esto se continúa quedarà finalmente (m) el excesso de alguna figura circumscripta sobre el circulo, menor que qualquiera diferencia propuesta: luego (n) los poligonos circumscriptos degeneran en el circulo. (m) 2 Lemm. 11 P. 6. (n) 6.def.12

PROPOSICION 4.

Qualquier poligono regular circumscripto al circulo es igual al triangulo, cuya base es igual al ambito del poligono, y la altura al radio, y el poligono regular inscripto en el circulo es igual al triangulo cuya base es el ambito del poligono inscripto, y la altura igual a la perpendicular desde el centro a uno de sus lados.

Porque el radio AB tirado al contacto B es perpendicular (a) la tangente IF, y tirando las rectas AF, AI, AN, &c. el poligono quedarà resuelto en tantos triangulos como lados, que tendràn la misma altura AB, y las bases FI, IN, &c. iguales: luego (b) los triangulos seràn iguales entre si, y el triangulo que tuviere la base igual al ambito del poligono FI, IN, NT, &c. y la altura igual al radio AB, serà igual a todos los triangulos juntos, ò al poligono circumscripto. Assimismo, porque los lados del poligono inscripto son iguales por la suposicion: luego (c) las perpendiculares AO, AQ, &c. son iguales, y la AO es la altura comun de los Fig 1. (a) 18. P. 3. (b) 1. P. 6. (c) 14. P. 3.

triangulos en que està resuelto el poligono inscripto: luego (d) el triangulo cuya base es el ambyto del poligono inscripto, y la altura igual a la perpendicular AO es igual a todos los triangulos juntos, ò al polygono inscripto, que es lo que se avia de demostrar.

(d) 1.P.6.

PROPOSICION 5.

El circulo es igual al triangulo, cuya base es igual a su circumferencia, y la altura a su semidiametro.

Porque los poligonos regulares circumscriptos al circulo, y los triangulos de quienes la base es el ambyto del poligono, y la altura el radio, siempre (a) son iguales entre si; pero los poligonos circumscriptos siempre de mas, y mas lados (b) degeneran en el circulo; y los triangulos cuya base es el ambyto del poligono, y la altura el radio, degeneran en el triangulo, cuya base es la circumferencia del circulo, y la altura el radio [*como se demostrarà aqui mismo:*] luego (c) el circulo es igual al triangulo cuya base es igual a la circumferencia, y la altura el radio.

(a) 4.P.d. (b) 3.P.d. (c) 1.P.d.

Que el triangulo cuya base es el ambyto del poligono, y la altura el radio degenere en el triangulo, cuya base es la circumferencia, y la altura el radio, demuestrase desta manera. Porque el primer triangulo al segundo tiene la proporcion (d) que

el ambyto del poligono a la circumferencia; esto es la que sus bases; pero (d) el ambyto del poligono degenera en la circumferencia : luego el primer triangulo degenera en el segundo : luego el circulo, &c. que es lo que se avia de demostrar.

(d) 3. P. d.

COROLARIOS.

1 De aqui, y de la 41. P. 1. se sigue, que el rectangulo contenido del radio, y de la mitad de la circumferencia es igual al circulo, y el del radio, y de toda la circumferencia duplo dèl, y el del diametro, y de toda la circumferencia quadruplo del mismo. Fi. 8. l. 4.

2. El circulo al quadrado inscripto en èl tiene la razon que la (BAD) mitad de la circumferencia al diametro, y al circumscripto la que la quarta parte de la circumferencia al diametro.

Porque el rectangulo de BAD, y del radio BE, ò de su igual BF [*esto es* (e) *el mismo circulo*] al rectangulo GFBD contenido de la FG, y de la BF [*esto es* (f) *al quadrado inscripto*] tiene la razon, que la (BAD) mitad de la circumferencia a la FG, ò al diametro BD su igual : luego el circulo al duplo del rectangulo GFBD, esto es al quadrado circumscripto HG tiene la razon, que la BAD al duplo del diametro BD, ò como la BA quarta parte de la circumferencia al diametro BD.

(e) *Cor. ant.*
(f) *Schol. 7. P. 4.*

PROPOSICION 6.

La circumferencia del circulo contiene a su diametro menos que tres vezes, y vna septima parte suya, pero mas que tres vezes.

Para demostrar este theorema inscribiò Archimedes vn poligono regular de 96. lados, y circumscribiò otro de otros tantos lados, y demostrò, que el ambyto del poligono circumscripto contiene al dia-

diametro menos que tres vezes, y $\frac{1}{7}$ ò $\frac{10}{70}$: luego la circumferencia que es menor que el ambito del poligono circumscripto, tambien contendrà al diametro menos que tres vezes, y vna septima parte suya, ò $\frac{10}{70}$. Y tambien demostrò, que los 96. lados del poligono inscripto [*y mucho mas la circumferencia que es mayor*] contienen al diametro tres vezes, y mas que $\frac{10}{70}$ partes suyas: y si se circumscriben, y inscriben poligonos regulares de mas, y mas lados, la proporcion de la circumferencia al diametro se acercarà mas, y mas a la verdadera proporcion, que tienen entre si, como lo executaron *Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio*, y otros.

Proporciones del diametro con la circumferencia.

La primera de Archimides: el diametro 7, la circumferencia 22 mayor que la verdadera. El diametro 71, la circumferencia 223 menor que la verdadera. Si las proporciones de 22 a 7, y de 223 a 71 se reducen a vn comun consequente [*lo que se haze de la misma manera que quando los quebrados se reducen a vn comun denominador*] saldràn las proporciones de 1562 a 497, y de 1561 a 497; y assi si el diametro se supone de 497 partes, serà la circumferencia de 1562 partes mayor que la verdadera, y la de

1561

1561 partes menor que la verdadera: y se diferenciaràn entrambas de la verdera circum ferencia con menos que $\frac{1}{497}$ parte del diametro. Y si la proporcion de 7 a 22 y de 71 a 223 se reducen a vn comun consequente, saldràn las proporciones de 1561 a 4906, y de 1562 a 4906: luego si la circūferencia se supone de 4906 partes, el diametro de 1561 partes serà menor que el verdadero, y el de 1562 mayor que el verdadero, con vna cantidad menor que la $\frac{1}{4906}$ parte de la circumferencia.

La proporcion de Metio es mucho mas exacta que la de Archimedes, y es: el diametro 113, la circumferencia 355 mayor que la verdadera. En terminos pequeños no ay otra mas cercana a la verdadera; porq̄ si el diametro se supone de 10000000 saldrà la circumferencia de 31415929 partes, que de la verdadera se diferencia con vn excesso muy poco mayor, que dos diez millonesimas partes del diametro.

La proporcion de Ludolpho Ceulen es mucho mas exacta que entrambas: los terminos de la primera tienen 21 figuras, y los de la segunda 36.

Diametro.

100.000.000.000.000.000.000.

Circumferencia mayor que la verdadera.

314.159.265.358.979.323.847.

Circumferencia menor que la verdadera.

314.159.265.358.979.323.846.

Y

Y assi la diferencia de entrambas de la verdadera circumferencia es menor que vna parte del diametro denominada de la vnidad, y de los 20. ceros.

Diametro.

100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.

Circumferencia mayor que la verdadera.

314.159.265.358.979.323.846.264.338.327.950.289.

Circumferencia menor que la verdadera.

314.159.265.358.979.323.846.264.338.327.950.288.

Y assi la diferencia destas circumferencias entre las quales està la verdadera, es vna parte del diametro, cuyo denominador es vna vnidad con 35. ceros.

S C H O L I O.

De la proporcion hallada se sigue.

1 Dada la circumferencia hallar el diametro.

El termino mayor de la proporcion hallada pongase en el primer lugar, el menor en el segundo, la circumferencia en el tercero, y el quarto termino es el diametro que se busca; v.g. la circumferencia del circulo maximo de la tierra contiene 6300. *leguas Castellanas, y buscase el diametro de la tierra, hagase como* 355 *a* 113, *asi* 6300 *a otro quarto termino, que es* $2005\frac{25}{71}$ *leguas Castellanas, que tiene el diametro de la tierra.*

Dado

2. Dado el diametro hallar la circumferencia.

El termino menor de la proporcion pongase en el primer lugar, el mayor en el segundo, el diametro dado en el tercero, y el quarto termino es la circumferencia que se busca; v.g. si el diametro de la tierra es de $2005\frac{25}{71}$ *leguas Castellanas, hagase como* 113 *a* 355, *assi* $2005\frac{25}{71}$ *a otro quarto termino, y saldràn* 6300 *leguas Castellanas por la circumferencia de la tierra.*

3. La dimension del circulo.

Multipliquese el semidiametro del circulo con la mitad de la circumferencia, y el producto es la area (a) del circulo: ò multipliquese el semidiametro con la circumferencia, y la mitad del producto es la area del circulo: ò multipliquese el diametro con la circumferencia, y la quarta parte del producto es la area del circulo: y assi por la area del circulo maximo de la tiera provienen $3.158.429\frac{41}{71}$ *leguas quadradas Castellanas.* (a) 1. Corol. 5. P. d.

La diferencia entre la area hallada, y entre la verdadera area del circulo sale quando la diferencia entre la mitad de la circumferencia verdadera, y de la hallada se multiplicare con el semidiametro dado; ò quando la diferencia entre el semidiametro hallado, y el verdadero se multiplicare por la mitad de la circumferencia dada.

4. La dimension de los cilindros, y conos.

El cilindro, y qualquier prisma se produce quando la altura se multiplica por la base; el cono, y la piramide quando

la tercera parte de la altura se multiplica por la base, porque
(b) 10. y 7. P.12. *son tercias partes de cilindros, y de prismas (b) sobre la misma base, y en la misma altura, como si la base de vn cilindro es de 50 pies quadrados, y la altura de 100 será la solidez del cilindro de 5000 pies cubicos, y la del cono de $1666\frac{2}{3}$*

PROPOSICION 7.

Las circumferencias de circulos tienen entre si la misma proporcion que sus diametros.

Fig. 5. Porque los ambitos de los poligonos semejantes, que se pueden inscribir infinitamente en los
(c) 1. Corol. P.12. circulos siempre tienen (c) entre si la misma proporcion que los diametros AF, IC; pero (d) estos
(d) 3. P. d. ambitos degeneran en las circumferencias: luego
(e) Por.2. P. 12. (e) las circumferencias tienen la misma proporcion que los ambitos de los poligonos inscriptos, esto es la misma que los diametros, que es lo que se, &c.

PROPOSICION 8.

La superficie del prisma, assi del circumscripto como del inscripto a vn cilindro, es igual al rectangulo, cuya altura es igual al lado del cilindro, y la base igual al perimetro de la base del prisma.

Fig. 6. La superficie del prisma circumscripto toca al ci-

cilindro, segun las lineas EA, NF, &c. que son lados del cilindro; pero estos lados [porque el cilindro se supone recto] son perpendiculares al plano de la base: luego (f) son tambien perpendiculares a las lineas CG, GM, &c. pero los dichos lados EA, NF son iguales entre si: luego vn lado del cilindro es comun altura de todos los rectangulos CO, OM, MH, &c. luego (g) la superficie del prisma circunscripto es igual al rectangulo contenido del ambito de la base del prisma, y de vn lado del prisma, ò del cilindro. (f) 3. def. 11 (g) 1. p. 6.

De la misma manera se demuestra la segunda parte, porque el lado del cilindro es comun altura de los rectangulos BDIK, KIQP, &c. que constituyen la superficie del prisma inscripto: luego la superficie, &c. que es lo que se avia de demostrar.

PROPOSICION 9.

La superficie de vna pyramide regular circumscripta à vn cono recto, es igual al triangulo, cuya base es igual al ambito de la base pyramidal, y la altura al lado del cono, y la superficie de vna pyramide regular inscripta en vn cono recto es igual al triangulo, cuya base es igual al ambito de la base pyramidal, y la altura a la perpendicular tirada desde el vertice a vn lado de la base.

Fig. 7. A los contactos G, K, M tirense las rectas BG, BK, BM, que seràn los lados del cono recto, iguales entre si; y porque el exe BA es perpendicular al

(a) 18. P. 11 plano FKD por la suposicion, tambien (a) el plano GBA serà perpendicular al plano FKD; pero la

(b) 18. P. 3. HG (b) es perpendicular a la recta AG, que es la comun seccion de los planos FKD, y GBA: luego

(c) 4. def. 11 (c) la HG tambien es perpendicular al plano GBA:

(d) 3. def. 11 luego (d) es perpendicular a la linea BG: luego la recta BG, que es el lado del cono, es la altura del triangulo FBH. De la misma manera se demuestra, que el lado del cono es la altura de los demàs trian-

(e) 1. P. 6. gulos HBL, LBD, &c. luego (e) el triangulo contenido del ambito FHLD, y del lado del cono es igual a la superficie de la pyramide circumscripta.

La segunda parte se demuestra casi de la misma manera, porque tirando desde el vertice B la perpendicular BC al lado de la pyramide inscripta, serà esta la altura comun de todos los triangulos de la pyramide inscripta.

PROPOSICION 10.

La superficie de un prisma regular circumscripto a un cilindro recto degenera en la superficie del cilindro; y la superficie de una pyramide circumscripta a un cono recto degenera en la superficie del cono.

Fig. 6. Porque las superficies de los prismas regulares

circumſcriptos, y inſcriptos infinitamente à vn cilindro tendràn finalmente menor diferencia entre ſi, que qualquiera propueſta, como ſe puede demoſtrar por la 8. y 3. deſte: luego la ſuperficie del priſma circumſcripto tendrà finalmente mucho menor diferencia de la ſuperficie del cilindro, que qualquiera diferencia propueſta, porque la ſuperficie del cilindro es media entre las ſuperficies de los priſmas circumſcripto, y inſcripto: luego (a) la ſuperficie del priſma circumſcripto degenera en la ſuperficie del cilindro. (a) 6 *def.* 12

De la miſma manera ſe demueſtra la ſegunda parte por la 9. y 3. deſte. Porque la altura BO (*de la pyramide inſcripta*) ſe diferenciarà menos de la altura BG (*de la circumſcripta*) y tambien los perimetros de las baſes pyramidales, que qualquiera diferencia propueſta: luego la ſuperficie de la pyramide circumſcripta finalmente tendrà menor diferencia de la ſuperficie de la pyramide inſcripta, que qualquiera diferencia propueſta: luego la ſuperficie de la pyramide circumſcripta mucho mas tendrà menor diferencia de la ſuperficie conica, que qualquiera propueſta: luego (a) degenera en la ſuperficie conica. *Fig.* 7.

En las figuras ſe ponen ſolamente las mitades de los cilindros, y conos, para evitar la confuſion de las lineas, pero ſe han de imaginar los cilindros, y conos enteros, a los quales ſe circumſcriben, y inſcriben los priſmas, y las pyramides, porque deſta manera mas claramente ſe comprehenderà que las ſuperficies planas circumſcriptas ſon mayores, como dize el axioma 3.

Lem-

Lemma para la proposicion siguiente.

Fig.9. *Si las lineas AB, CD, EF son proporcionales, y la KB fuere la mitad de la AB, y la EG dupla de la EF, tambien las KB, CD, EG, quedarân proporcionales. Porque la recta KB a la AB es como la EF a la EG: luego (b) el*
(b) 16.P.6. *rectangulo de las KB, EG es igual al rectangulo de las AB,*
(c) *EF; pero (c) el de las AB, EF es igual al quadrado de la*
17.P.6. *CD: luego el rectangulo de las KB, EG tambien es igual al quadrado de la CD: luego (c) KB, CD, EG son proporcionales. Este Lemma tambien se demuestra por el Corol. 23. P. 5.*

PROPOSICION II.

El circulo cuyo radio es medio proporcional entre el lado del cilindro recto, y entre el diametro de la base es igual a la superficie cilindrica.

Fig.8. El radio GH sea medio proporcional entre el lado BC del cilindro recto, y entre el diametro BD de la base cilindrica: digo, que el circulo GPH es igual a la superficie del cilindro. A los circulos ABN, GPH circumscribanse poligonos regulares, que serân tambien semejantes, como los NM, RS, y sobre el poligono NM erijase vn prisma circumscripto al cilindro; y porque BD, GH, BC son pro-
(a) porcionales por la suposicion, tambien (a) AD, ò
Lem.ant. su igual AN, GH, y dupla de la BC serân proporcionales; y por quanto el triangulo rectangulo contenido de la AN, y del ambito del poli-
(b) 4.ar.d. gono MN es igual (b) al poligono circumscripto NM, y el rectangulo contenido de la BC, ò de su igual

igual EF, y del mismo ambito del poligono NM [esto es (c) el triangulo rectangulo contenido del ambito NM, y de la dupla de la BC] es igual (d) a la superficie del prisma circumscripto al cilindro; pero el triangulo contenido del ambito MN, y de la AN al triangulo contenido del ambito MN, y de la dupla de la BC tiene (e) la proporcion que la AN a la dupla de la BC: luego el poligono NM a la superficie del prisma circumscripto al cilindro tiene la misma proporcion, que la linea AN a la dupla de la BC; pero las AN, GH, y dupla de la BC estàn demostradas proporcionales: luego (f) la AN a la dupla de la BC tiene duplicada la razon de la AN a la GH: luego el poligono NM a la superficie del dicho prisma tiene duplicada la razon de la linea AN a la GH; pero el poligono NM a su semejante GRQS tambien (g) tiene duplicada la razon de la AN a la GH: luego el poligono NM a la superficie prismatica, y al poligono GRQS tiene vna misma razon: luego (h) la superficie del prisma circũscripto al cilindro, y el poligono GRQS son iguales entre si. De la misma manera se demuestra, que qualesquiera superficies prismaticas, que infinitamente se pueden circumscribir al cilindro siempre son iguales a los poligonos, que infinitamente se pueden circũscribir al circulo GPH; pero las superficies prismaticas (i) degenerã en la superficie del cilindro, y los poligonos (k) degeneran en el circulo GPH: luego (l) la superficie del cilindro es igual al circulo GPH, que es, &c. Por esta proposicion se podrá dar vn circulo igual a la superficie de vn cilindro.

(c) 41. P. 1.
(d) 8. P. d.
(e) 1. P. 6.
(f) 10 def. 5
(g) 1. P. 12.
(h) 9. P. 5.
(i) 10. P. d.
(k) 3. P. d.
(l) 1. P. d.

COROLARIOS.

1 La superficie de vn cilindro recto es igual al rectangulo contenido de su lado, como de BC, y de la circumferencia de su base.

Fig. 8. *Porque està demostrado, que la dupla de la BC a la GH*
(a) 7. P. d. *es como la GH a la BA, ò a su igual AN, esto es (a) como la circumferencia PP a la circumferencia BN: luego el triangulo de la primera, que es la dupla de la BC, y de la*
(b) 16. P. 6. *quarta, que es la circumferencia BN (b) es igual al triangulo de la segunda GH, y de la tercera, que es la circumferencia PP; pero el triangulo rectangulo de la GH, y de la*
(c) 5. P. d. *circumferencia PP es igual (c) al circulo GPH, esto es (d)*
(d) 11. P. d. *a la superficie cilindrica: luego el triangulo rectangulo de la dupla de la BC, y de la circumferencia BN* [esto es (e)
(e) 41. P. 1. el rectangulo de la BC, y de la circumferencia BN] *es igual a la superficie cilindrica, que es lo que, &c.*

Deste Corolario se sigue, que las propriedades de los rectangulos son comunes a las superficies de cilindros rectos.

Fig. 10. 2 Las superficies cilindricas, como BM, QN de igual altura tienen entre si la razon que los diametros BF, QR de sus bases.

Porque los rectangulos contenidos de las circumferencias
(f) 1. Corol. P. 11. *CL, SE, y de iguales rectas FM, RN, que son (f) iguales a las superficies cilindricas, tienen entre si (g) la propor-*
(g) 1. P. 6. *cion que las bases, que son las circumferencias CL, SE, esto es (a) que los diametros BF, QR.*

Las

3 **Las supercies cilindricas, que tienen bases iguales, tienen entre si la misma razon que sus alturas.** Fig. 11. y 12.

Porque los rectangulos contenidos de iguales circumferencias GH, MQ por la suposicion, y de los lados TI, BR, a quienes (f) *son iguales las superficies cilindricas, tienen* (g) *entre si la proporcion que las alturas TI, BR.* (f) 1. Corol. P. 1 1. d. (g) 1. P. 6.

4 Semejantes superficies cilindricas como BM, RI tienen duplicada la razon de los diametros BF, QR de sus bases. Fig. 10.

Porque por suponerse los cilindros semejantes será (i) *la MF a la IQ, como la BF a la QR, esto es* (k) *como la circumferencia CL a la circumferencia SE: luego los rectangulos contenidos de las circumferencia CL, SE, y de los lados MF, IQ serán tambien semejantes, y tendràn* (l) *duplicada la razon de la que la MF tiene a la IQ, ò la BF a la QR; pero las superficies cilindricas* (f) *son iguales a dichos rectangulos: luego semejantes superficies cilindricas, &c.* (i) 4. def. 12 (k) 7. P. d. (l) 20. P. 6.

5. Las superficies cilindricas como BM, RI tienen la razon compuesta de las razones de los lados FM, IQ, y de los diametros BF, QR de sus bases. Fig. 10.

Porque las superficies cilindricas BM, RI son iguales (f) *a los rectangulos de las circumferencias CL, SE, y de los lados FM, IQ; pero* (m) *estos rectangulos tienen la razon compuesta de las razones de la circumferencia CL a la SE, esto es* (k) *del diametro BF al QR, y del lado FM al IQ: luego las superficies cilindricas, &c.* (m) 23. P. 6.

Fig.12.y 13. 6. Iguales superficies cilindricas, como las AR, FD tienen reciprocos los diametros AB, FN de sus bases a las alturas FH, RB: y si los tienen reciprocos son iguales.

(n) 14.P.6. (o) 7.P.d. (p) 1.Corol. 11.P.d. *Porque los rectangulos contenidos de las circumferencias QM, TV, y de los lados RB, FH, si son iguales (n) reciprocan las bases QM, TV* [esto es (o) los diametros AB, FN] *con las alturas FH, RB: y si las reciprocan son iguales; pero (p) las superficies cilindricas AR, FD son iguales a estos rectangulos: luego tambien tienen reciprocos los mismos diametros, y alturas.*

7 *Finalmente del 1. corolario se sigue la dimension de vna superficie cilindrica, conviene a saber, si la altura del cilindro se multiplica con la circumferencia de su base; como si la altura es de 20 pies, y la circumferencia de su base de 6, serà la superficie cilindrica de 120 pies quadrados.*

PROPOSICION 12.

La superficie de vn cilindro recto tiene a su base la proporcion, que el lado del cilindro a la quarta parte del diametro de su base.

Fig.8. Del cilindro recto CD sea la base ABN, el lado CB, y la quarta parte del diametro la recta BO: digo, que la superficie cilindrica a la base ABN tiene la proporcion, que el lado BC a la recta BO, Sea

la

la GH media proporcional entre el lado BC, y entre el diametro BD de la base: luego (a) la GH serà tambien media proporcional entre la BA, ò su igual AN, y entre la dupla de la BC; pero el circulo GPH, cuyo radio es la GH, es igual (b) à la superficie cilindrica, y el circulo GPH a la base ABN tiene (c) duplicada la razon del radio GH al radio AN, y esta razon duplicada es la misma (d) que tiene la dupla de la BC al radio BA [*porque la dupla de la BC, GH, AN son continuas proporcionales*:] luego la superficie cilindrica CD à la base ABN tiene la misma razon que la dupla de la BO à la AN, ò a su igual AB; pero como la dupla de la BC a la AB, assi es (e) la BC a la mitad de la AB, que es la BO, la quarta parte del diametro: luego la superficie cilindrica CD a la base ABN tiene la proporcion que el lado CB à la quarta parte del diametro, que es lo que, &c.

(a) *Lem. ant.* 11. P. d.
(b) 11. P. d.
(c) 2. P. 12.
(d) 10 def. 5
(e) 15. P. 5.

CO R O L A R I O.

La superficie cilindrica, cuyo lado es igual al diametro de su base es quadrupla de la base, y si el lado del cilindro fuere igual a la quarta parte del diametro de su base, la superficie cilindrica serà igual a la base, como consta de la proposicion demostrada.

PROPOSICION 13.

El circulo cuyo radio es medio proporcional entre el lado del cono recto, y el radio de su base es igual a la superficie conica.

Fig. 14. Del circulo OPL el radio OL sea medio proporcional entre el lado BC del cono recto CBD, y entre el radio AC de la base ACG: digo, que el circulo OPL es igual a la superficie conica. A los circulos ACG, OPL circumscribanse poligonos regulares los EF, IN, y sobre el poligono EF erijase vna pyramide circũscripta al cono. Y por quãto el
(a) radio AC, ò su igual AG al radio OL es como OL al
10 def. 5 lado BC por la suposicion: luego (a) la AG a la BC tiene duplicada la razõ de la que la AG tiene a la
(b) 1. P. 6. OL; pero como la AG (b) a la BC, assi es el triangulo contenido de la AG, y del ambito EF al triangulo contenido de la BC, y del mismo ambito EF: luego el triangulo de la AG, y del ambito EF al triangulo de la BC, y del mismo ambito tiene du-
(c) plicada la razon de la AG a la OL; pero el triangu-
4. P. d. lo de la AG, y del ambito EF (c) es igual al poligono EF; y el triangulo de la BC, y del mismo am-
(d) bito EF (d) es igual a la superficie de la pyramide
9. P. d. circumscripta: luego el poligono EF a la superficie pyramidal tiene tambien duplicada la razon de la AG à la OL. Pero el poligono EF al poligono IN su

ſu ſemejante por la conſtruccion, tambien (e) tiene duplicada la razon de la AG a la OL: luego el poligono EF tiene vna miſma razon a la ſuperficie pyramidal, y al poligono IN: luego (f) la ſuperficie pyramidal, y el poligono IN ſon iguales entre ſi. (e) 1. P. 12 (f) 9. P. 5.

De la miſma manera ſe demueſtra que las ſuperficies de las pyramides que infinitamente de mas, y mas poligonos ſe pueden circumſcribir al cono, ſiempre ſon iguales a los poligonos, que tambien infinitamente ſe pueden circumſcribir al circulo OPL; pero (g) las ſuperficies pyramidales degeneran en la ſuperficie conica, y los (h) poligonos en el circulo OPL: luego la ſuperficie (i) conica, y el circulo OPL tambien ſon iguales entre ſi, que es lo que ſe avia, &c. (g) 10. P. d. (h) 3. P. d. (i) 1. P. d.

Por eſta propoſicion ſe podrá dar vn circulo igual a vna ſuperficie conica.

COROLARIOS.

1 La ſuperficie del cono recto es igual al triãgulo contenido del lado (BC) del cono, y de la circumferencia (CG) de ſu baſe.

Sea el radio OL medio proporcional entre AC, y BC; y porque la circumferencia CG a la circumferencia PP es (a) como el radio AG al OL, eſto es como la OL a la BC por la ſupoſicion: luego el triangulo rectangulo de la primera, que es la circumferencia CG, y de la quarta BC es igual (b) al triangulo rectangulo de la ſegunda, que es la circumferencia Fig. 14. (a) 7. P. d. (b) 16. P. 6.

PP

(c) *PP; y de la tercera OL; pero (c) este triangulo es igual al*
5. p. d. *circulo OPL, y el circulo OPL (d) a la superficie conica*
(d) *BCD: luego el triangulo de la circumferencia CG, y del la-*
13. p. d. *do BC es igual a la superficie conica.*

Fig. 10. 2 Las superficies conicas como BAF, QXR, que tienen iguales lados BA, QX tienen la proporcion que los diametros BF, QR de sus bases. Porque los diametros BF, QR tienen la razon que las circumferencias de las bases.

Fig. 11. y 12. 3. Las superficies conicas como CFT, AZB, que tienen iguales bases tienen la proporcion, que los lados CF, AZ.

Fig. 10. 4 Las supercies conicas semejantes, como BAF, QZR tienen duplicada la razon de los diametros de sus bases.

Fig. 10. 5 Qualesquiera superficies conicas tienen entre si la razon compuesta de los lados [BA, QZ] y de los diametros [BF, QR] de sus bases.

6. Superficies conicas iguales tienen reciprocos los lados, y los diametros de sus bases, y las que los tienen reciprocos son iguales.

Todos estos Corolarios se demuestran del Corolario primero, como los Corolarios de la superficie cilindrica se demostraron de su primer Corolario.

7 Finalmente se medirà vna superficie conica, si su lado se multiplicare por la mitad de la circumferencia de su base: como si el lado es de 5 pies, y la circumferencia de la base de 20, multiplica 5 por

10,

10, y saldrà la superficie conica de 50 pies quadrados, como està demostrado en el 1. corolario.

PROPOSICION 14.

La superficie de vn cono recto tiene la proporcion a su base, que el lado al radio de la misma. Fig. 14.

El radio OL sea medio proporcional entre el lado BC, y el semidiametro AC de su base: luego (a) la BC a la AC tiene duplicada la razon de la que la OL tiene a la AC; pero el circulo del radio OL (b) es igual a la superficie conica CBD, y este circulo a la base conica ACG (c) tiene tambien duplicada la razon del radio OL a la AC, que es la razon que la BC tiene a la AC: luego (d) tambien la superficie conica CBD a la base ACG tiene la proporcion que el lado BC al radio AC, que es lo que se avia, &c.

(a) 10. def. 5
(b) 13. P. d.
(c) 2. P. 12.
(d) 7. P. 5.

COROLARIOS.

1 La superficie de vn cono recto formado de vn triangulo equilatero al derredor de la perpendicular (KA) es dupla de su base QT. Fig. 32.

Porque el lado KB es igual al lado BD: luego es duplo de la mitad AB, que es el radio de la base.

2 La superficie de vn cono formado de vn isosceles rectangulo EBD tiene a la base la proporcion que el diametro al lado de vn quadrado. Fig. 29.

Tire-

Tirese la perpendicular BA, que corta el angulo B en dos partes iguales, y será el angulo ABD semirecto: luego (a) *el ADB tambien es semirecto, y los lados* (b) *DA, BA son iguales: luego la BD es el diametro en el quadrado AK, y la AD su lado; pero la AD tambien es radio de la base PT, porque la perpendicular AB corta el diametro ED en dos partes iguales: luego es* [c] *como la BD al radio AD, esto es como el diametro del quadrado a su lado, assi esta superficie conica a su base.*

(a) 32. P. 1.
(b) 6. P. 1.
(c) 14. P. d.

Fig. 29. 3 La superficie del cilindro recto como GK tiene la proporcion a la superficie de vn cono recto GBN, que el lado del cilindro a la mitad del lado del cono.

Porque la superficie del cono GBN a la base MI es [c] *como el lado BN al radio QN de su base, esto es* [d] *como la mitad de la BN a la quarta parte del diametro GN; pero la base MI a la superficie cilindrica GK* [e] *es como la quarta parte del diametro GN al lado NK del cilindro: luego por la igualdad es como la superficie conica GBN a la superficie cilindrica GK, assi la mitad del lado del cono al lado NK del cilindro.*

(d) 15. P. 5.
(e) 12. P. d.

Lemma para la proposicion siguiente.

Fig. 15. *En el triangulo NPV tirese la QD paralela a la NV: digo, que el rectangulo de las PN, NV es igual al rectangulo de las PQ, QD, y juntamente al rectangulo de la NQ, y de las NV, QD juntas. Al lado NP tire se la perpendicular*

cular NA igual a la NV, cumplase el rectangulo NO, tirese el diametro PA, y del punto Q la QE paralela a la NA, que corta la PA en el punto B, y por él tirese la CF paralela a la NP. Y por quanto la AN es igual a la NU, tambien la QB es igual a la QD, porque (a) las NP, QP, AN, ò su igual NV, y la BQ son proporcionales, y tambien (a) las NP, QP, NV, QD: luego (b) las BQ, y QD son iguales, y estarà el rectangulo ON contenido de las PN, NU, ò de su igual AN, y el FQ de las PQ, y QD, ò de su igual BQ, y el EN de las NQ, NV, ò de su igual NA, y el OB, ò su igual (c) CQ de la NQ, y de la QD, ò de su igual BQ; pero el rectangulo ON es igual a los rectangulos QF, EN, OB juntos: luego el rectangulo de las PN, NU es igual al rectangulo de las PQ, QD, y juntamente al rectangulo de la NQ, y de las NV, QD juntas, que es lo que se avia, &c.

(a) Corol. 4. p. 6.
(b) 9. p. 5.
(c) 43. p. 1.

S C H O L I O.

Si la superficie conica se corta con vn plano paralelo a su base la linea que se forma en la superficie conica serà circumferencia de vn circulo.

La superficie del cono PNO cortese con vn plano paralelo a su base ZZ, digo, que la linea QSR en la superficie conica es circumferencia de vn circulo. Porque si los planos paralelos se cortan con el plano PNO seràn (a) las rectas NO, QR paralelas entre si; y si los mismos planos se cortan con otro plano por el vertice R, y el centro V de la base conica, seràn

Fig. 16.
(a) 16. p. 11.

los

(b) *los (b) los triangulos PQD, PVN, y RDP, OVP equiangulos entre si: luego (c) las NV, VP, QD, DP son proporcionales, y tambien las OV, VP, RD, DP: luego (d) las NV, QD, OV, RD son tambien proporcionales [por ser entrambas razones iguales a la razon de VP a DP;] pero la primera NV es igual a la tercera OV: luego (e) la segunda QD tambien es igual a la quarta RD. De la misma manera se demostrarán qualesquiera otras rectas tiradas desde el punto D a la linea QSR iguales entre si: luego (f) la linea QSR es circumferencia del circulo cuyo centro es el punto D. Esta es la 4. Prop. de Apollonio Pergeo en el 1. lib. de las secciones conicas.*

29. P. 1. (c) 4. P. 6. (d) 11. P. 5 (e) 14. P. 5. (f) 15 def. 1

PROPOSICION 15.

Si vn cono recto se corta con vn plano paralelo a su base, el circulo cuyo radio es medio proporcional entre el segmento del lado intercepto entre la base, y la seccion, y entre los dos radios juntos de la base, y de la seccion, es igual superficie conica entre la seccion, y entre la base comprehendida.

Fig. 16. y 17. El cono recto NPO cortese con el plano QSR paralelo a la base NZO: digo, que el circulo GHM, cuyo radio GH es medio proporcional entre la parte NQ del lado del cono, y entre los radios QD, NV juntos de los circulos QSR, NZO, es igual a la superficie conica comprehendida entre los circulos paralelos QSR, NZO. Entre las rectas PN, NU sea media proporcional la GF, y entre

las PQ, QD la GK, describanse los circulos GFL, GKT, serà (a) el circulo GKT igual a la superficie conica QPR, y el GFL a la NPO. Y por quanto el rectangulo de las PN, NV es igual (b) al rectangulo de las PQ, QD, y juntamente al rectangulo de NQ, y de las NU, QD juntas, y la GF es media proporcional entre las PN, NU por la construcion, el rectangulo PNV (c) es igual al quadrado de la GF. Assimismo por ser la GK media proporcional entre las PQ, QD por la construccion, el rectangulo PQD (c) es igual al quadrado de la GK; y porque la GH es media proporcional entre las QN, y las QD, NV juntas, el rectangulo (c) de la QN, y de las QD, NV juntas es igual al quadrado de la GH: luego el quadrado de la GF tambien es igual a los dos quadrados de la GH, y GK: y porque los circulos tienen (d) entre si la razon que los quadrados de sus radios: luego el circulo GLF es igual a los dos circulos GKT, y GHM; pero el circulo GLF es igual a la superficie (a) conica NPO: luego la superficie conica NPO tambien es igual a los dos circulos GKT, y GHM; pero de la superficie NPO la parte QPR (a) es igual al circulo GKT: luego la superficie residua comprehendida entre los dos circulos QSR, y NZO es igual al circulo GHM, que es lo que se avia de demostrar.

(a) 13. P. d.
(b) Lem. ant.
(c) 17. l. 6.
(d) 2. P. 12

Lemma para la proposicion siguiente.

Fig. 18. Las rectas (BH, CG) que en vn circulo cortan iguales arcos (BC, HG) son paralelas entre si.

Tirese la CH, y por quanto los arcos BC, HG son iguales por la supposicion, seràn (f) *los angulos BHC, GCH iguales; pero son alternos: luego* (g) *las rectas BH, CG son paralelas entre si.*

(f) 29. P. 3.
(g) 27. P. 1.

PROPOSICION 16.

Si en vn circulo se inscribe vna figura regular de pares, è iguales lados, y se tira vna subtensa de vna extremidad del diametro al punto que es termino del lado immediato a la otra extremidad del diametro, y se tiran lineas rectas, que juntan los angulos igualmente distantes de las extremidades del diametro. El rectangulo del diametro, y de la subtensa es igual al rectangulo de vn lado de la figura inscripta, y de todas las rectas que juntan los angulos.

Fig. 18. En el circulo ACE inscribase vna figura regular de pares, è iguales lados; tirese la recta EB de la extremidad del diametro al punto B, que es el termino del lado immediato al diametro, y a los angulos que igualmente distan del punto A; tirense las rectas BH, CG, DF: digo, que el rectangulo contenido del diametro AE, y de la subtensa EB, es igual al rectangulo contenido de vn lado de la figura inscrip-

ſcripta como AB, ò BC, y de todas las rectas juntas BH, CG, DF, que juntan los angulos igualmente diſtantes del diametro. Tirenſe las rectas CH, DG: y porque las BH, CG, DF cortan iguales arcos (a) BC, HG, y CD, GF: luego (b) las BH, CG, DF ſon paralelas entre ſi. De la miſma manera ſe demueſtra, que las rectas BA, CH, DG, EF ſon paralelas: luego (c) los triangulos BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE ſon equiangulos entre ſi, y ſerà (d) como la BK a la KA, aſſi la HK a la KL, y como la HK a la KL, aſſi la CM a la ML, y como la CM a la ML, aſſi la GM a la MN, y como la GM a la MN, aſſi la DO a la ON, y como la DO a la ON, aſſi la FO a la OE: luego (e) como la vna antecedente BK a la vna conſequente KA, aſſi todas las antecedentes BK, KH, CM, MG, DO, OF (eſto es las lineas BH, CG, DF, que juntan los angulos) a todas las conſequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE, eſto es al diametro AE; pero (f) como la BK a la AK, aſſi es la EB a la BA: luego (g) es como las rectas BH, CG, DF juntas al diametro AE, aſſi es la recta EB a la BA: luego (h) el rectangulo contenido de la BA, y de las BH, CG, DF juntas es igual al rectangulo de las medias AE, y EB, que es lo que, &c.

(a) 26. P. 3.
(b) Lem. ant.
(c) 29. y 15. P. 1.
(d) 4. P. 6.
(e) 12. P. 5.
(f) 8. P. 6.
(g) 11. P. 5.
(h) 16. P. 6.

PRO-

PROPOSICION 17.

Si en el segmento de vn circulo, cuya base es perpendicular a su exe se inscribe vna figura de pares, è iguales lados, y se tira la subtensa de la extremidad del diametro al punto, que es termino del lado immediato al vertice del exe, y se tiran otras rectas, que juntan los angulos igualmente distantes de dicho vertice, el rectangulo del exe, y de la subtensa es igual al rectangulo contenido de vn lado de la figura inscripta, y de todas las rectas que juntan los angulos, y de la mitad de la base del segmento.

Fig. 19. En el segmento DAF, cuya base DF es perpendicular al exe AO inscribase vna figura de pares, è iguales lados, y tirese la recta EB, como en la proposicion antecedente: digo, que el rectangulo de la EB, y del exe AO es igual al rectangulo contenido de vn lado de la figura, y de todas las rectas BH, CG juntamente con la DO, que es la mitad de la base DF. Porque se demuestra como en la proposicion
(a) 4. P. 6. antecedente, que es (a) como la BK a la KA, assi la HK a la KL, y la CM a la ML, y la GM a la MN, y la DO a la ON: luego tambien es como la BK a la
(b) 8. P. 6. KA [esto es (b) como la BE a la AB] assi las (c)
(c) 12. P. 5. BH, CG, DO juntas a la AO: luego el rectangulo de las extremas, que son las BE, y AO es igual al rectangulo de las medias, que son la AB, y las BH, CG, DO juntas, que es lo que, &c.

Lem-

Lemma 1. para la proposicion siguiente.

Si en el circulo maximo de la esphera se inscribe vna figura regular tal, que el numero de sus lados se pueda partir por quatro, y el circulo al derredor de su exe (AE) inmobil dà vna buelta, se inscribirà en la esphera vn cuerpo contenido de superficies conicas rectas. Fig. 18.

Porque las rectas BA, HA, y DE, FE describen (d) *enteras superficies de conos rectos; y por quanto las lineas CB, GH, item GF, CD alargadas concurren* (e) *en vn mismo punto hàzia vna, y otra parte con el diametro AE alargado [porque las CG, DF estàn cortadas por medio, y en angulos rectos, y los angulos DCM, FGM tambien son iguales:] las CB, GH hàzia A, y las otras hàzia E: luego tambien estas lineas describen partes de vnas superficies conicas comprehendidas de circulos paralelos, que los vertices de los angulos B, C, D describen en la superficie espherica.* (d) 2. def. 12 (e) 26. p. 1.

Lemma 2.

Si en la seccion maxima de vn segmento espherico, como en la DAF, cuyo exe es la AO, se inscribe vna figura de iguales lados, y dà vna buelta alderredor de su exe, se inscribirà en el segmento espherico vn cuerpo contenido de superficies conicas. Fig. 19.

La demonstraciõ es la misma que del Lemma antecedente.

PRO-

PROPOSICION 18.

Fig. 18. *Puestas las mismas cosas que en el Lemma primero, y tirada la recta EB desde la extremidad del diametro hazia el punto, que es termino del lado que toca a la otra extremidad del diametro. Todas las superficies conicas inscriptas en la esphera serán iguales a vn circulo, el quadrado de cuyo radio es igual al rectangulo contenido del diametro AE, y de la*
(a) 17.p.6. *subtensa EB, esto es (a) al circulo cuyo radio como I es medio proporcional entre las AE, y EB.*

Porque por ser las rectas BH, CG, DF iguales a las rectas BK, CM, DO dos vezes repetidas, será
(b) 1.p.2 (b) el rectangulo contenido de vn lado de la figura inscripta en el circulo maximo [como del lado AB, ò BC, &c.] y de todas las BH, CG, DF [que juntan los angulos igualmente distantes del diametro] igual al rectangulo contenido de la AB, y BK de la BC, y de la compuesta de las BK, CM, de la CD, y de la compuesta de las CM, DO, de la DE, y DO, porque desta manera las BK, CM, DO se repiten cada vna dos vezes; pero el rectangulo de la
(c) AB, y de todas las dichas rectas BH, CG, DF es
16. p. 6. igual (c) al rectangulo AEB, esto es (d) al quadra-
(d) Suposicion. do del radio I: luego el quadrado del radio I es igual a los rectangulos de las AB, y BK, de la BC, y de la compuesta de las BK, CM, de la CD, y de la compuesta de las CM, DO, de las DE, y DO.

Tri-

Tomense medias proporcionales entre las AB, y BK la P, entre la BC, y la compuesta de las BK, CM la Q, entre la CD, y la compuesta de las CM, DO la R, entre las DE, y DO la S, y seràn (e) los quadrados de las P, Q, R, S iguales a los dichos rectangulos; pero el quadrado del radio I està demostrado igual a los mismos rectangulos: luego tambien es igual a los quadrados de las P, Q, R, S. Y por quanto (f) los circulos tienen la misma proporcion que los quadrados de sus radios: luego el circulo del radio I es igual q todos los circulos juntos de los radios P, Q, R, S; pero los circulos de los radios P, y S son iguales (g) a las superficies conicas que producen los lados AB, ED por ser la P media proporcional entre el lado AB, y el radio BK de su base, y la S media proporcional entre el lado ED, y el radio DO: y el circulo del radio Q es igual (h) a la superficie conica del segmento comprehendido entre los dos paralelos circulos de los diametros CG, EH por ser la Q media proporcional entre la BC, y la compuesta de las BK, CM. Por la misma razon el circulo del radio R es igual a la superficie conica del segmento comprehendido entre los paralelos circulos de los diametros CO, DF: luego el circulo del radio I es igual a todas las superficies conicas juntas inscriptas en la esphera que es lo que, &c.

(e) 17. P. 6.

(f) 2. P. 12

(g) 13. P. d.

(h) 15. P. d.

PROPOSICION 19.

Fig. 19. *Puestas las mismas cosas que en el Lemma segundo, y tirada la recta EB desde el extremo del diametro AE al termino del lado AB immediato al vertice del exe, todas las superficies conicas inscriptas en el segmento espherico DAF son iguales al circulo, cuyo radio es medio proporcional entre la EB, y el segmento AO del exe.*

La demonstracion es la misma que la de la proposicion antecedente; pero en lugar de la proposicion 16 se ha de citar la 17 deste libro.

SCHOLIO.

Si la superficie espherica se corta con vn plano, la linea que se forma en la superficie espherica será circumferencia de vn circulo.

De la esphera AD cortese la superficie con vn plano, lo Fig. 24. *primero por el centro A: digo, que la linea DGF en la super-* (a) 5. def. 12 *ficie espherica es circumferencia de vn circulo; porque (a) todas las rectas, como las AD, AG, AF, &c. tiradas desde el centro de la esphera hasta su superficie son iguales entre si:* (b) 15. def. 1 *luego (b) la linea DGF es circumferencia del circulo cuyo centro A es el mismo que de la esphera, y es circulo maximo de la esphera.*

Fig. 28. *Lo segundo, el plano secante no passe por el centro de la esphera, y haga la seccion EFG en la superficie espherica, y*

del

del punto A, que es centro de la esphera sea la AD perpendicular al plano secante, y tirense las DE, DF, DG, AE, AG. Y por quanto las AE, AG (a) son iguales, seràn sus quadrados tambien iguales, esto es (c) los quadrados de las AD, DE seràn iguales a los quadrados de las AD, DG; y quitando el quadrado de la AD, quedaràn los de las DE, DG iguales: luego (d) las rectas DE, DG son iguales. De la misma manera se demostraràn qualesquiera otras rectas tiradas del punto D a la linea EFG iguales entre si: luego (b) la linea EFG es circumferencia del circulo, cuyo centro es el punto D. Esta es la 1. Prop. de Theodosio.

(a) 5 d f. 12
(c) 47. P. 1.
(d) Co. P. 6 P. 1.
(b) 15. def. 1

PROPOSICION 20.

Las superficies conicas inscriptas en la esphera se terminan en la superficie espherica.

Fig. 20.

Sea tan pequeña como se quiera vna superficie como la X, manifiesto es, que dentro de la superficie espherica ACEG puede aver otra concentrica, cuya diferencia a ella sea menor que la cantidad X. Cortense entrambas con vn plano por el centro, y sean los circulos maximos ACEG, DPLM: tirese el diametro ADE, y por el punto D la tangente NQ. Si el arco AE se corta por mitad en el punto C, y el residuo otra vez por mitad, quedarà finalmente (a) el arco AB menor que el arco AN: y si se le acomoda la subtensa AB, manifiesto es, que no llegarà a la circumferencia PDML,

(a) Lemm. 2. Schol. 18 P. 6.

 y

y serà vn lado de vna figura de iguales, y pares lados inscripta en el circulo CAGE, cuyo lado ninguno llega a la circumferencia PDML: luego si al derredor del diametro AE dan vna buelta entera, se inscribiràn dentro de la exterior superficie espherica superficies conicas, que incluiràn la superficie espherica concentrica a la exterior, y seràn
(b) 3. ax. d. mayores (b) que esta superficie: y por quanto la superficie espherica, cuyo circulo es el DPLM es menor que la superficie espherica, cuyo circulo es ACEG con cantidad menor que la X propuesta, por la suposicion; tambien, y mucho mas la superficies conicas seràn menores que la superficie espherica cuyo circulo es ACEG cō cantidad menor,
(c) 6. def. 12 que la X propuesta: luego (c) se terminan en la superficie espherica ACEG, que es lo que se avia de demostrar.

PROPOSICION 21.

Las supercies conicas inscriptas en vn segmento espherico como en el DAF se terminan en la superficie del dicho segmento.

Fig. 22.

La demonstracion es casi la misma que la de la proposicion antecedente.

PROPOSICION 22.

El circulo cuyo radio es medio proporcional entre el diametro AE, y la subtensa EB [el qual se demostrò en la P. 18. d. igual a todas las superficies conicas juntas inscriptas en la esphera] se termina (d) en el circulo cuyo radio es el diametro AE de la esphera. (d) 6. def. 12

Porque si en el circulo maximo se inscriben mas y mas lados infinitamēte, y bueltos al derredor del diametro AE produxeren superficies conicas, es manifiesto que el lado AB serà finalmente menor que qualquiera recta propuesta, y por consiguiente la subtensa EB se acercarà al diametro AE siempre mas, y mas, y la diferencia entre las AE, y EB serà finalmente menor que qualquiera diferencia propuesta: luego la media proporcional entre las AE, y EB, que siempre es mayor que la EB se diferenciarà de la AE finalmente con mucho menor defecto, que qualquier propuesto: luego (e) tambien el circulo, cuyo radio es medio proporcional entre las AE, y EB se diferenciarà del circulo, cuyo radio es el AE con menor defecto que qualquier propuesto: luego (d) se terminarà en el circulo del radio, que es lo que se avia, &c. Fig. 21. (e) Vease 2. P. 12

PRO-

PROPOSICION 23.

El circulo, cuyo radio es medio proporcional entre la EB,
Fig.21. *y el segmento AO del exe [el qual se demostrò en la P. 19. d. igual a todas las superficies conicas inscriptas en el segmento esphérico DAF] se termina en el circulo cuyo radio es la recta AD tirada desde el vertice del segmento hasta la circumferencia del circulo DQFN, que es la base del dicho segmento.*

(g) 22. P.d. Porque la recta (g) EB se termina (h) finalmente en la AE: luego tambien la media proporcional (h) 6.d.f.12 entre las EB, y AO se terminarà (h) finalmente en la media proporcional entre las AE, y AO, la qual (i) 2. Corol. 8. P. 6. es (i) la recta AD, esto es la media proporcional entre las rectas EB, y AO tendrà finalmente menor diferencia de la recta AD, que qualquiera diferencia propuesta: luego el circulo, cuyo radio es medio proporcional entre las EB, y AO, tambien se terminarà finalmente en el circulo del radio AD, ò se diferenciarà dèl con menor diferencia que qualquiera propuesta, que es lo que &c.

Lemma para la proposicion siguiente.

Si vn diametro es duplo de otro diametro, serà el circulo del duplo diametro quadruplo del otro (a) circulo.

3. Corol. 4. P. 2. *Porque si vna linea recta es dupla de otra recta (a) el qua-*

quadrado de la dupla es quadruplo de la que fuere su mitad; pero los circulos(b) son como los quadrados de los diametros: luego si vn diametro, &c. (b) 2. P. 12.

PROPOSICION 24.

La superficie de qualquier esphera es quadrupla del circulo maximo de la misma esphera.

En el circulo maximo de la esphera, cuyo diametro es AE, imaginese inscripta vna figura regular, cuyos lados se puedan dividir por 4. y alderredor del diametro AE buelta la figura produzga superficies conicas inscriptas en la esphera, y tirese la recta EB, està demostrado(a) q̃ todas las superficies conicas juntas inscriptas en la esphera son iguales al circulo, cuyo radio es igual al rectangulo de las AE, y EB, esto es, cuyo radio es medio proporcional entre las AE, y EB: y esto sucederá siempre, si las inscripciones se continuaren infinitamente; pero las superficies conicas inscriptas se terminan(b) finalmente en la superficie espherica, y el circulo, cuyo radio es medio proporcional entre las AE, y EB, se termina(c) en el circulo, cuyo radio es la AE: luego(d) la superficie espherica es igual al circulo del radio AE; pero(e) este circulo es quadruplo del circulo maximo ACEG: luego la superficie espherica es tambien quadrupla del mismo circulo maximo: que es lo que se avia de demostrar.

Fig. 21. (a) 18. P. d. (b) 20. P. d. (c) 22. P. d. (d) 2. P. d. (e) Lem. ant.

CO-

COROLARIO.

Deste nobilissimo, y admirable Theorema, conque Archimedes consiguió fama immortal entre todos los Geometras se demuestra, que el circulo cuyo semidiametro es igual al diametro de la esphera es igual a la superficie espherica.

SCHOLIO.

De aqui se sigue la dimension de la superficie espherica, que es la principal entre las superficies curvas, y el modo es en dos maneras.

1 *Midase el circulo maximo de la esphera por el Scholio de la 6. P. d. y el producto se multiplique por 4, como el circulo maximo de la esphera terrestre contiene leguas quadradas Castellanas* $3158429\frac{41}{71}$, *este numero multiplicado por 4 dará leguas quadradas Castellanas* $12633718\frac{22}{71}$ *que contiene la superficie espherica terrestre.*

2 *El diametro de la esphera multiplicado por la circumferencia del circulo maximo de la misma esphera dará la superficie espherica, como el diametro de la esphera terrestre tiene* $2005\frac{25}{71}$ *leguas Castellanas, y la circumferencia 6300, los dos numeros multiplicados entre si daràn* $12633718\frac{22}{71}$ *leguas quadradas Castellanas por la superficie de la esphera terrestre. La demonstracion se sigue del 1. Cor. 5. P. d, porque el rectangulo contenido del diametro, y de la circumferencia es quadruplo del circulo.*

PRO-

PROPOSICION 25.

La superficie de qualquiera porcion espherica como de la DAF es igual al circulo, cuyo radio es la recta AD tirada desde el vertice de la dicha porcion a la circumferencia del circulo DQFN, que es base de la dicha porcion. Fig. 226

En la mayor seccion de la porcion espherica imaginese inscripta vna figura de iguales, y pares lados excepta la base, la qual figura buelta al derredor del exe AO inscribirà en la dicha porcion superficies conicas, y tirese la recta EB, como queda dicho en las prop. 18. y 19. Todas las superficies conicas juntas inscriptas en el segmento espherico son iguales (a) al circulo, cuyo radio es medio proporcional entre las EB, y AO: y esto sucederà siempre si las inscripciones se continuaren infinitamente; pero las superficies conicas inscriptas en el segmento se terminan (b) en la superficie espherica del dicho segmento, y el circulo cuyo radio es medio proporcional entre las EB, y AO se termina (c) en el circulo del radio AD: luego (d) la superficie espherica de la porcion DAF es tambien igual al circulo del radio AD, que es lo que &c.

(a) 19. P. 4.
(b) 21. P. 4.
(c) 23. P. 4.
(d) 2. P. 4.

Este es otro de los mas admirables Theoremas de Archimedes.

PROPOSICION 26.

Fig.23. *La superficie de vn cilindro recto como del HPSV circumscripto a la esphera es igual a la superficie de la misma esphera; y si el cilindro, y la esphera se cortan con planos perpendiculares al exe (BG) los segmentos de la superficie cilindrica seràn iguales a los segmentos de la superficie espherica, cada vno al suyo.*

Lo primero, porque el lado HP del cilindro es igual al diametro PS de su base por la suposicion, (a) Corol.12 P.d. serà la superficie cilindrica HS quadrupla (a) de la base, esto es quadruplá del circulo maximo de la esphera inscripta en el cilindro; pero tambien la (b) 24. P.d. superficie de la esphera es quadrupla (b) del mismo circulo maximo: luego la superficie del cilindro recto circumscripto a la esphera, es igual a la superficie de la misma esphera.

Lo segundo, tirense las rectas BO, GO; y por (c) 31. P.3. quanto el angulo BOG es recto (c) en el semicirculo, y desde èl cae la recta OC perpendicular a la (d) 2. Corol. 8. P.6. BG, serà (d) la BO media proporcional entre las GB, y BC, ò entre sus iguales IT, HI: luego (e) el (e) 11. P.d. circulo del radio BO es igual a la superficie cilindrica HT; pero el dicho circulo tambien es igual (f) 25. P.d. (f) a la superficie espherica del segmento OBK: luego la superficie cilindrica HT, y la espherica OBK son iguales entre si.

Lo

Lo tercero, porque la superficie cilindrica HX se demuestra igual a la superficie espherica QBR por la misma razon que la HT igual a la OBK: luego la residua cilindrica IX es igual a la residua espherica QOKR contenida entre los dos paralelos circulos. Lo mismo es de los otros segmentos: luego la superficie de vn cilindro recto, &c.

PROPOSICION 27.

Los segmentos de la superficie espherica comprehendidos de circulos paralelos tienen entre si la proporcion, que los segmentos del diametro BC, CD, DA, AE, EF, FG) perpendiculares, a los circulos paralelos.

Porque los segmentos de la superficie espherica, como los OBK, QOKR, MQRN, &c. son iguales (a) a las superficies cilindricas HT, IX, LN, &c. pero estas tienen la proporcion (b) que los segmentos BC, CD, DA, &c: luego los segmentos esphericos tienen la misma proporcion, que es lo que se avia de demostrar. Fig. 23. (a) 26. P. d. (b) 13. P. 12.

SCHOLIO.

De aqui se manifiesta la proporcion de las zonas, y de los climas entre si; por ser la misma que de los segmentos del exe, y estos estàn conocidos por las tablas de los senos.

Desta misma proposicion se sigue la dimension de los segmentos de la superficie espherica; porque està conocida toda la superficie espherica por el Scholio de la Prop. 24, y tambien la proporcion de los segmentos esphericos, que es la misma que de los segmentos del exe: luego dirè: como el radio al seno v.g. de 30. grados, assi la mitad de la superficie espherica a la superficie del segmento espherico, cuyo segmento del exe es igual al seno de 30 grados.

SCHOLIO 2.

Vn plano que no corta a la esphera la toca en vn punto solo.

Fig. 28. *Porque si no es assi, toquela en mas puntos que en vno, como en los puntos E, y G; y del centro A de la esphera tirense las rectas AE, AG y passe por ellas vn plano, el qual formarà en la esphera la circumferencia del circulo EBG; y*
(a) 3. P. 1. *en el plano que no corta a la esphera formarà (a) la recta EG. Y por quanto el plano tangente en el qual està la recta EG no corta a la esphera, y por consiguiente, ni al circulo EBG, que està en la superficie espherica: luego la recta EG no corta al circulo EBG, y estarà fuera dèl; pero los puntos E, y G estàn en la circumferencia del circulo EBG: luego*
(b) 2. P. 3. *(b) la recta EG corta al circulo EBG: està demostrado tambien que no le corta: luego vn plano, que no corta, &c. Esta es 3. P. 1. de Theodosio.*

Lemma para la propoſicion ſiguiente.

Si vn plano [como el QN] toca a la eſphera [en O] la recta [AO] tirada del centro al contacto es perpendicular al plano tangente.

Al plano tangente QN, y a la eſphera por el contacto O corten dos planos, que en la eſphera formaràn los circulos OG, OD, y en el plano QN (a) las rectas CO, IO, que ſeràn tangentes de dichos circulos: luego [b] la AO es perpendicular a entrambas lineas IO, OC: luego [c] la AO es perpendicular al plano QN: que es lo que, &c. Fig. 24. (a) 3. P. 11. (b) 18. P. 3. (c) 4. P. 11.

PROPOSICION 28.

Qualquier eſphera es igual al cono [ZO] cuya altura [KO] es igual al radio de dicha eſphera, y la baſe (Z) igual a la ſuperficie eſpherica. Fig. 25, 26, y 27.

Imagineſe a la eſphera circumſcripto vn cuerpo poliedro, cuyos angulos ſolidos ſe imaginen cortados con planos tangentes de la eſphera, y ſe formarà otro cuerpo poliedro circumſcripto a la eſphera menor que el antecedente, que tendrà mas angulos, y mas planos; pero eſtos planos ſeran menores que los del antecedente. Si deſte poliedro los angulos ſolidos ſe cortaren con otros nuevos planos tangentes, y aſſi ſe continùare infinitamente, avrà finalmente vn poliedro, que exceda a la Fig. 25.

eſphe-

esphera con vn solido menor que qualquiera propuesto, y su superficie compuesta de los planos tangentes (que infinitamente se pueden imaginar mas, y mas planos, menores, y menores) excederà a la superficie espherica con vn plano menor que qualquiera propuesto: estas dos cosas son bastantemente manifiestas, sin que necessiten de otra demonstraccion. El tal poliedro, que se termina (a) en la esphera està compuesto de pyramides, que tienen el vertice comun en el centro de la esphera, y sus bases son los planos tangentes de la misma esphera, los quales componen la superficie del poliedro; y porque las rectas tiradas del centro A a los contactos de los planos son (b) perpendiculares a ellos, la altura de todas las pyramides de que se compone el poliedro serà vna misma, esto es el radio AB de la esphera: luego si vn plano X se supone igual a la superficie del poliedro, y sobre este plano vna pyramide de la altura MN igual al radio AB de la esphera, seràn (c) todas las pyramides susodichas, esto es el mismo poliedro igual a la pyramide XN. De la misma manera todos los demàs poliedros circũscriptos a la esphera que se producẽ por la continuada seccion de los angulos solidos, siempre seràn iguales a las pyramides [representadas por XN] que tienen la altura [MN] igual al radio de la esphera, y la base X igual a la superficie de los poliedros circumscriptos; pero los poliedros se terminan finalmente en la (d) esphera, como queda di-

(a) 6. def. 12

(b) Lem. ant.

Fig. 26.

(c) 6. P. 12.

(d) 6. def. 12

dicho, y la pyramide XN [como se demostrarà im- Fig. 27.
mediatamente] se termina en el cono ZO : luego
(e) tambien la esphera es igual al cono ZO, &c. (e) 1. P.d.

Que la pyramide XN (f) se termine en el dicho (f)
cono, demuestrase desta manera: las superficies de 6.def.12
liedros se terminan en la superficie espherica, como
queda dicho; pero las bases X de las pyramides XN
se suponen siempre iguales a las superficies de los
poliedros, y la basis Z del cono ZO por la suposi-
cion es igual a la superficie espherica: luego las ba-
ses X finalmente se terminarà en la base Z; pero (g) (g) Corol. 11
las pyramides XN al cono de igual altura [como se P. 12.
supone] tienen la misma proporcion que la base
X a la base Z: luego las pyramides tambien final-
mente se terminaràn en el cono ZO.

Archimedes propone este Theorema desta ma-
nera: qualquier esphera es quadrupla del cono, cu-
ya base es igual al circulo maximo de la esphera, y
la altura igual al radio de la misma esphera.

S C H O L I O.

*Deste nobilissimo Theorema se sigue la dimension de la
esphera, que es la principal entre los cuerpos; porque si la sex-
ta parte del diametro, ò la tercia del radio se multiplica por* (h)
la superficie espherica, ya (h) *conocida, serà el producto la* Schol.
solidez de la esphera; v.g. la sexta parte del diametro ter- 24.P.d.
restre contiene $338\frac{16}{71}$ *leguas Castellanas, y la superficie ter-
restre contiene* $12633718\frac{22}{71}$ *leguas quadradas Castella-
nas, los dos numeros multiplicados entre si producen*
$4273043823\frac{202247}{357911}$ *leguas solidas Castellanas. Por-*

que

(k) 28. P. d. (l) Schol. 6. P. d. *Porque la esphera es igual (k) al cono, cuya altura es el radio de la esphera, y la base igual a la superficie esphérica; pero (l) la solidez del cono se produce multiplicando la tercia parte de su altura (que es el radio de la esphera) por la base (esto es por la superficie esphérica:) luego tambien la solidez de la esphera se produce multiplicando la tercera parte del radio por la superficie esphérica.*

PROPOSICION 29.

Qualquier sector de la esphera es igual al cono, cuya altura es igual al radio de la esphera, y la base igual a la superficie esphérica del mismo sector.

Fig. 28. Lo primero, sea el sector AECG menor que la mitad de la esphera: imaginese al sector cirumscripto vn cuerpo poliedro rectilineo ; y formando el mismo discurso como en la proposicion antecedẽte, quedarà demostrada la proposicion. Lo que vnicamente se ha de demostrar en esta proposicion, y de que depende todo el discurso es, que la superficie del poliedro compuesta de las superficies planas, que tocan por todas las partes la superficie esphérica ECG es mayor que la superficie espherica ECG, lo qual se demuestra desta manera. Imaginese, que a la superficie espherica ECG se añade otra, y semejante [teniendo el circulo del radio EG por comun base, en la qual se juntaràn] circumscripta con planos tangentes de la misma manera

nera que la ECG, y serà (a) toda la superficie compuesta de los planos tangentes mayor que toda la superficie espherica compuesta: luego tambien la mitad de la superficie de los planos serà mayor que la mitad ECG de la superficie espherica. (a) 3. ax. 1. d.

Lo segundo, sea el sector AEBG mayor que la mitad de la esphera; y porque entrambos sectores juntos son iguales (b) al cono cuya altura es el radio de la esphera, y la base la superficie de la esphera, esto es (c) a dos conos, que tengan la misma altura, y las bases iguales a las superficies de los segmentos ECG, y EBG; pero el sector AECG menor que el emispherio es igual al cono, cuya altura es el radio, y su base igual a la superficie ECG, como està demostrado: luego el otro sector AEBG es igual al otro cono, cuya altura es el radio, y la base igual a la superficie EBG, que es lo que, &c. (b) 28. p. d. (c) 11. p. 12.

COROLARIO.

Y por quanto la superficie ECG es igual (d) al circulo del radio CG, y la superficie EBG igual al circulo del radio BG, seràn los sectores AECG, y AEBG iguales a los conos, cuyas alturas son el radio de la esphera, y las bases los circulos de los radios CG, y BG. (d) 25. p. d.

SCHOLIO.

De aqui se sigue la dimension de los sectores, y de los segmentos esphericos: los sectores se mediràn multiplicando la tercera parte del radio (e) por la superficie esphérica de los (e) Schol. 6. p. d.

 sec-

sectores (la qual queda conocida por el Scholio de la Prop. 27.) ò por el circulo de los radios CG, y BG.

Los segmentos se mediràn midiendo el cono EAG, y quitandole del sector, si este es menor que el emisphèrio, ò añadiendole al sector, si este es mayor que el emispherio.

Fig. 23. *El segmento MQRN contenido entre dos circulos (ya sean paralelos, ya no lo sean) se medirà: si los segmentos QBR, y MBN, que ya quedan conocidos se restan el vno del otro.*

PROPOSICION 30.

El emisferio (EOBD) es duplo del cono (EBD) que tiene la misma base, y la misma altura con el emisspherio.

Fig. 29. Porque el cono cuya base es la superficie del emispherio EOBD, y la altura el radio AB tiene
(a) 11. P. 12 (a) al cono EBD la proporcion que la base a la base, esto es, que la superficie del emispherio EOBD
(b) 24. P. d. al circulo maximo PT; pero (b) la superficie del emispherio EOBD es dupla del circulo maximo: luego el cono de la base EOBD, y de la altura AB
(c) 28. P. d. es duplo del cono EBD; pero el emispherio (c) es igual al cono, cuya base es la superficie EOBD del emispherio, y la altura el radio: luego el emispherio es duplo del cono EBD, que es lo que se avia de demostrar.

PROPOSICION 31.

Partase la esphera en dos segmentos ILBG, ISKG con el plano IQGT, que no passe por el centro A, y el diametro BOK sea perpendicular al plano secante. Hagase como la altura OB del segmento ILBG al radio AB de la esphera, assi la altura OK del otro segmento a la KN: y tambien, como la altura del segmento ISKG al radio AK, ò AB, assi la altura OB del otro segmento a la BD; seràn los conos ING, IDG, cuyas alturas son las ON, OD, y la base comun IQGT iguales a los segmentos esphericos. Lo segundo, la proporcion de los segmentos es la misma que de las rectas DO, NO. Lo tercero, el segmento ISKG al maximo cono IKG inscripto en èl tiene la proporcion que la recta NO a la KO; y el segmento ILBG al cono maximo IBG inscripto en èl, la que la recta DO a la BO. Fig. 30.

Lo primero, cortense la esphera, y los conos con vn plano segun el diametro BK, y quedaràn formados en la esphera el circulo maximo BLKG, y en los conos los triangulos BIG, IKG. Y por quanto el diametro BOK se supone perpendicular al circulo QT, serà el angulo IOB recto (a) y el angulo (b) BIK en el semicirculo tambien es recto; y porque en el triangulo BIK desde el angulo recto està tirada la recta IO perpendicular a la base BK, serà (c) como la BI a la IO, assi la BK a la KI: luego la razon duplicada de la BI a la IO es igual (d) a la razon duplicada de la BK à la KI, esto es [por (e) ser

(a) 3 d. f. 11
(b) 31. r. 3.
(c) 8. r. 6.
(d) 34. r. 5.

fer las BK, KI, KO continuas proporcionales] ferà igual a la razon de la BK a la KO. Demàs desto: por quanto es como la OK al radio AB, assi la OB a la BD por la suposicion, serà invirtiendo la DB a la BO, como la AB a la OK, y alternando la DB a la BA, como la BO a la OK, y componiendo la DA a la BA, como la BK a la OK. Y por quanto està demostrado, que la BK a la OK es la razon duplicada de la BI a la IO; y por consiguiente la BK a la
(e) 2. P.12. OK (e) es como el circulo del radio BI al circulo del radio IO, serà tambien la DA a la BA, como el circulo del radio BI al circulo del radio IO: luego el cono cuya altura es la recta DA, y la base
(f) 15. P.12 el circulo del radio IO, esto es, el circulo QT es (f)
(g) Corol. 29 P. d. igual al cono, cuya altura es la recta BA, y la base el circulo del radio BI, esto es, es igual al sector (g) espherico AIBG: luego si a entrambos, conviene a saber, al sector AIBG, y al cono de la altura DA, y del circulo QT, se añade vn mismo cono IAG, quedaràn iguales el segmento espherico ILBG a los dos conos de quienes el vno tiene la base QT, y la altura DA, y el otro IAG, que tiene la misma base
(h) 14. P. 12 QT, y la altura OA; pero estos dos conos (h) componen el cono IDG: luego el segmento ILBG es igual al cono IDG. De la misma manera se demuestra, que el segmento ISKG es igual al cono ING, con esta sola diferencia, que el cono IAG, que antes se añadia, se ha de quitar.

Lo

Lo segundo, porque los conos (i) IDG, ING tienen la proporcion que las rectas DO, NO: luego los segmentos ILBG, ISKG demostrados iguales a los dichos conos tienen la misma proporcion que las rectas DO, NO. (i) 14. P. 12

Lo tercero, porque el cono IDG al cono IBG es (i) como la DO a la BO: luego el segmento ILBG igual al cono IDG tiene al cono IBG la misma proporcion que la recta DO a la BO.

SCHOLIO.

Siguese de la primera parte deste Theorema otra, y mas facil dimension de los segmentos esphericos, que es medir los conos IDG, ING, multiplicando (k) las terceras partes de las rectas DO, NO con el circulo QT. (k) Schol. 6. P. d.

PROPOSICION 32.

Vn cilindro recto [GK] circumscripto a la esphera es sesquialtero de la esphera, assi en la solidez, como en la superficie total. Fig. 29.

Sea la recta BQ exe comun de la esphera, y del cilindro, y el cono EBD se el maximo que se puede inscribir en el emisphero EOBD. Por quanto el cilindro EK [la mitad del entero GK] es (a) triplo del cono EBD, y el emispherio (b) es duplo del mismo cono: luego el cilindro EK al emisphe- (a) 10. P. 12 (b) 30. P. d.

rio

rio tiene la proporcion que 3 a 2: luego tambien
(c) 15. P. 5 (c) el cilindro entero GK a la esphera QEBD es como 3 a 2.

(d) Corol. 12 P. d. Lo segundo, porque el lado KN del cilindro es igual al diametro GN de la base, será (d) la superficie del cilindro sin las bases quadrupla de la base MI: luego con las bases, esto es, la total superficie del cilindro será sextupla de la base MI, que es igual al circulo maximo de la esphera; pero la superficie de la esphera es quadrupla del circulo maximo: luego la superficie total del cilindro GK a la superficie espherica es como 6 a 4, ò como 3 a 2: luego el cilindro recto, &c.

Aqui fenece Archimedes sus Theoremas, y hizo tanto aprecio del vltimo, que le hizó gravar sobre su sepulcro, esperando eternizar con èl su fama. El P. Andres Tacquet adelanta la consideracion con otros treze Theoremas, no de menor estimacion que los mismos de Archimedes, de cuya importante doctrina no es justo que se defraude el Lector, y assi los añadirèmos aqui, para que logren a vn tiempo el curioso su enseñança, y el Autor su estimacion tan merecida.

PROPOSICION 33.

La superficie de la esphera es dupla de la del cilindro, que se forma del quadrado inscripto en la esphera.

Fig. 31. En vn circulo maximo de la esphera inscribase vn quadrado, que buelto al derredor de vn lado formarà el cilindro quadrado AKL: tirese la AL, que

que ferà diametro comun del quadrado, y de la efphera. Y porque el quadrado AL es igual (a) a los dos quadrados AK, KL, ferà duplo del vno AK: luego [b] tambien el circulo del diametro AL ferà duplo del circulo del diametro AK, efto es del circulo CN; pero la fuperficie efpherica [c] es quadrupla del circulo, cuyo diametro es la AL, porque efte es el circulo maximo de la efphera, fiendo la AL fu diametro: luego la fuperficie efpherica es octupla del circulo CN; pero por fer las rectas LK, KA iguales por la fupoficion, la fuperficie cilindrica ACL [d] es quadrupla del circulo CN: luego la fuperficie efpherica, que eftá demoftrada fer octupla del mifmo circulo, es dupla de la fuperficie cilindrica, que es lo que, &c.

(a) 47. P. 1.
(b) 2. P. 12.
(c) 24. P. d.
(d) Corol. 12 P. d.

PROPOSICION 34.

La fuperficie efpherica a la total fuperficie del cilindro quadrado infcripto en ella tiene la proporcion que 4 a 3.

Suponganfe las mifmas cofas, que en la propoficion antecedente. Y por quanto el lado LK del cilindro, y el diametro AK de la bafe fon iguales por la fupoficion, ferà (d) la fuperficie cilindrica CL quadrupla de la bafe CN: luego la total fuperficie del cilindro a entrambas bafes CN, y

Fig. 31.

y SL tiene la proporcion que 6 a 2; pero la superficie esphérica a entrambas bases CN, SL tiene la proporcion que 8 a 2 [porque està demostrado en la antecedente, que a la vna base es como 8. a 1.] luego la superficie esphérica a la total superficie cilindrica CL es como 8 a 6, ò como 4 a 3, que es lo que se avia, &c.

COROLARIO.

La superficie total del cilindro recto circumscripto a la esphera tiene a la superficie total del cilindro equilatero inscripto en la misma esphera la proporcion, que 2 a 1; porque la superficie total del cilindro recto circumscripto a la esphera tiene (b) a la superficie esphérica la proporcion que 1 2 a 8, y la superficie esphérica tiene a la superficie total del cilindro inscripto la proporcion que 8 a 6, como està demostrado en esta prop. luego por la igualdad la superficie total del cilindro circumscripto a la total del inscripto es como 1 2 a 6, ò como 2 a 1.

(b) 32. P. d.

PROPOSICION 35.

La superficie de qualquier segmento esphérico tiene a la superficie del cono maximo inscripto en el mismo segmento la proporcion que el lado (BG) del cono al radio (GO) de la base.

Fig. 30. Porque la superficie del segmento ILBG es igual

igual (a) al circulo del radio BG: luego (b) la proporcion de la dicha superficie al circulo QT [que es la base del dicho segmento, y del cono] tendrà duplicada la razon de la recta BG a la GO, esto es duplicada (c) de la razon que la superficie conica IBG tiene a la misma base QT: luego (d) la superficie espherica ILBG a la superficie conica IBG tiene la misma proporcion que la superficie conica IBG a la base QT. Porque siendo las tres superficies la del segmento espherico ILBG, la conica IBG, y el circulo QT continuas proporcionales, tendrà la primera a la vltima duplicada la razon de la que la primera tiene a la segunda, ò de la razon que la segunda IBG tiene a la vltima QT; pero (e) la superficie conica IBG a la base QT es como la BG a la GO: luego la superficie del segmento espherico a la del cono inscripto es como la BG a la GO, que es lo que, &c.

(a) 25. p.d.
(b) 2. p.12.
(c) 14. p.d.
(d) 10. def.5

PROPOSICION 36.

La superficie del emisphério [EOBD] tiene a la superficie del cono maximo, ò recto [EBD] inscripto en el emisphério la misma razon que el diametro en vn quadrado al lado suyo; y a la superficie de semejante cono circumscripto tiene la razon que el lado de vn quadrado a su diametro.

Fig. 29.

La primera parte està demostrada en la proposicion antecedente; porque la superficie de qual-

quitr segmento, y por consiguiente del emispherio EOBD a la superficie conica inscripta es como la BD a la DA; pero la BD es el diametro, y la DA es el lado del quadrado BADK: luego, &c.

Fig. 35. Lo segundo, la mitad del quadrado circumscripto al circulo [cuyo centro A] sea la EBC, que buelta al derredor del exe AB formarà vn cono inscripto en el emispherio; y porque el quadrado EC
(a) 47. P. 1. es duplo (a) del quadrado EB, ò de su igual GI,
(b) 2. P. 12. tambien (b) el circulo del diametro EC es duplo
(c) 34. P. d. del circulo, cuyo diametro es la GI, esto es duplo del circulo HGDI; pero (c) la superficie del emispherio contenido del cono EBC tambien es dupla del mismo circulo HGDI: luego el circulo cuyo diametro EC es igual a la superficie del emispherio. Y por quanto la superficie conica EBC al circulo del diametro EC, base del dicho cono, tiene la
(d) 14. P. d. razon (d) que el lado BE al semidiametro EA de
(e) 7. P. 5 la base, serà tambien (e) la misma superficie conica EBC a la superficie del emispherio inscripto en
(f) 8. P. 6. el cono, como BE a EA, esto es (f) como el diametro EC en el quadrado EBCF a su lado EB, que es lo que se avia de demostrar.

PROPOSICION 37.

La esphera assi quanto a la solidez, como quanto a la super-

perficie tiene al rhombo quadrado conico circumscripto la proporcion que el lado del quadrado al diametro.

Fig.35.

Al maximo circulo de la esphera HGDI circumscribase el quadrado EBCF, que dando al derredor del exe BF vna buelta formarà vn rhombo conico circumscripto a la esphera: y hagase como el lado EB del quadrado al diametro EC, assi S a R, y continùese la misma razon por los quatro terminos S, R, Q, O, y tendrà S a O triplicada la razon (a) de S a R, esto es de EB a EC, que es vna misma por la suposicion, y O a R tendrà duplicada la razon de O a Q, esto es de R a S, ò de EC a EB: luego O a R tiene la razon (b) que el quadrado de la EC al quadrado de la EB: luego (x) la O es dupla de la R. Demàs desto, imaginese la esphera EBCF circumscripta al rhombo conico, y tendrà la esphera HGDI (c) a la esphera EBCF triplicada la razon del diametro GI, ò de su igual EB al diametro EC, esto es la razon de S a O, que es vna misma, como està demostrado: pero la esphera EBCF al rhombo conico inscripto (d) tiene la proporcion que 2 a 1, esto es, que O a R, como està demostrado: luego por la igualdad la esphera HGDI al dicho rhombo es como S a R, esto es, como el lado EB del quadrado a su diametro EC.

(a) 10.def.5

(b) 20.P.6.

(x) 47.P.1.

(c) 18.P.12

(d) 30.P.4.

(e) Lo segundo, por quanto està demostrado (e)
36. P. d. que la superficie del emispherio à la superficie co-
(f) nica EBC; y por consiguiente (f) la total superfi-
15. P. 5. cie espherica a la total superficie del rhombo EBCF tiene la proporcion, que el lado del quadrado a su diametro: luego la esphera, assi quanto a la solidez, como quanto a la superficie tiene al rhombo quadrado conico EBCF la razon, que el lado del quadrado a su diametro, que es lo que, &c.

PROPOSICION 38.

Fig. 32. *La superficie de la porcion espherica [BGKD] en que està el cono equilatero (BKD) es dupla de la superficie conica.*

Porque la superficie de la porcion BGKD tiene
(a) a la superficie (a) del cono inscripto la razon, que
35. P. d. BK a BA; pero por ser el cono BKD equilatero por la suposicion, la KB es igual a la BD, y dupla de su mitad BA: luego la superficie, &c.

PROPOSICION 39.

La superficie esphèrica a la superficie total del cono equilatero inscripto en la esphera tiene la proporcion que 16 a 9.

Sea Z el centro de la esphera, y el cono equilate-
Fig. 32. ro BKD inscripto en ella, el exe comun de la esphera, y del cono la recta KZAO, segun el qual

cor-

cortando la esphera, y el cono con vn plano, que-
darà formado en la esphera el circulo maximo
OBKD, y en el cono el triangulo equilatero BKD,
cuyo lado BAD serà el diametro de la base conica
QT. Y por quanto el exe KA del cono es perpen- (a)
dicular a la base QT, serà el (a) angulo BAK recto: 3 *def.* 11
luego (b) el quadrado de la BA es igual al rectan- (b)
gulo KAO: y porque el lado (c) BD del triangulo 17.P.6. (c)
equilatero corta la AO la quarta parte del exe, se- 5. *Corol.*
rà el rectangulo KAO (ò su igual el quadrado BA) 15.P.4. (d)
triplo (d) del quadrado AO; pero el quadrado del 1.P.6.
radio ZO (e) es quadruplo del quadrado AO: lue- (e) 3. *Corol.*
go el quadrado del radio ZO al quadrado del ra- 4.P.2.
dio BA tiene la razon que 4 a 3: luego el circulo (f)
(f) OBKD al circulo QT tambien tiene la razon 2.P.12.
que 4 a 3, y el quadruplo del circulo OBKD, esto (g)
es (g) la superficie total de la esphera tiene al cir- 24.P.d. (h)
culo QT la razon que 16 a 3; pero la superficie (h) 1. *Corol.*
del cono equilatero BKD tiene al circulo QT, es- 14 P.d.
to es a su base, la razon que 2 a 1, y la superficie to-
tal del cono BKD, esto es juntamente con la base
a la misma base QT es como 3 a 1, ò como 9 a 3: y
porque la superficie espherica al mismo circulo
QT es como 16 a 3: luego la superficie de la esphe-
ra DG a la superficie total del cono equilatero
BKD es como 16 a 9.

Otra

Otra demonstracion.

Fig. 32. Por quanto el lado BD del triangulo equilatero
(c) 5. Corol. corta la quarta (c) parte AO del exe, la superficie
15. P. 4. (k) espherica BOD serà (k) tambien la quarta parte, y
27. P. d. por consiguiente la superficie BGKD tres quartas partes de la total superficie espherica: luego si la total superficie espherica se supone 16, serà la superficie BGKD 12; pero la superficie BGKD es
(l) 38. P. d. dupla (l) de la superficie conica BKD, y tiene a ella la razon que 12 a 6: luego la total superficie espherica tiene a la superficie conica BKD la razon que 16 a 6. Y porque la superficie conica
(m) 1. Corol. BKD del cono equilatero es dupla (m) de la base
14. P. d. QT, serà la superficie conica BKD [sin la base] a la total superficie conica, como 2 a 3, ò como 6 a 9: luego por la igualdad la superficie espherica es a la total superficie del cono equilatero inscripto como 16 a 9, que es lo que, &c.

PROPOSICION 40.

La superficie de la esphera tiene a la superficie total del cono circumscripto la razon que 4 a 9.

Fig. 33. Al circulo maximo BPM de la esphera circumscri-

ſcribaſe el triangulo equilatero DOF, que dando vna buelta al derredor del exe OAB formará vn cono equilatero circumſcripto a la eſphera : y al triãgulo DOF circumſcribaſe el circulo NDLOF que ſerá concentrico al circulo BPM, y alarguefe el exe OAB haſta N. Y por quanto (a) la recta BN es la quarta parte del exe ON, ſerà la ON dupla de la KB; y porque los circulos tienen (b) entre ſi duplicada la razon de ſus diametros, ſerà el circulo BPM al circulo NDLOF, como 1 a 4. Pero eſtà demoſtrado en la primera demonſtracion de la antecedente, que el circulo NDLOF tiene al circulo QR baſe del cono equilatero inſcripto en la eſphera FL la miſma razon que 4 a 3 : luego (c) por la igualdad el circulo BPM al circulo QR es como 1 a 3 : pero la ſuperficie total del cono DOF (d) es tripla del circulo QR: luego la total ſuperficie conica es nuevecupla del circulo BPM ; pero la ſuperficie de la eſphera TP es quadrupla del miſmo circulo BPM: luego la ſuperficie total del cono equilatero DOF tiene a la ſuperficie eſpherica, a quien eſtà circumſcripto, la miſma razon que 4 a 9, que es lo que ſe avia, &c.

(a) 5. Corol. 15. P. 4.

(b) 2. P. 12.

(c) 22. P. 5.

(d) En la 39. P. d.

PRO-

PROPOSICION 41.

La superficie total del cono equilatero circumscripto a la esphera es quadrupla de la total superficie del cono inscripto en la misma esphera.

Fig. 33. Porque la superficie total del cono equilatero
(a) DOF circumscripto tiene a la superficie espherica
40. P. d. la razon (a) que 9 a 4, y la superficie espherica tie-
(b) ne al cono equilatero SKT (b) inscripto en la es-
39. P. d. phera la razon que 16 a 9: luego por la igualdad
(c) perturbada (c) la superficie total del cono equila-
23. P. 5. tero circumscripto tiene a la superficie total del cono equilatero inscripto la misma razon que 16 a 4, ò 4 a 1, que es lo que se avia de demostrar.

PROPOSICION 42.

La esphera tiene al cono equilatero inscripto en ella la razon que 32 a 9.

Fig. 34. La esphera, y el cono BKC cortense por el exe comun KO con vn plano, que harà en la esphera el circulo maximo OFKI, y en el cono el triangulo equilatero BKC. Demás desto por el centro A passe vn plano perpendicular a la KO, que corte el emispherio FGKI, en el qual està inscripto el co-
(a) no maximo FKI. Y por quanto (a) el lado BC de
5. Corol. el triangulo equilatero corta la OP la quarta parte
15. P. 4. del exe OK, tendrà la PK a la AK la razon que 3

a 2, ò 9 à 6; pero la base QT al circulo OFKI, esto es a la base ND tiene la razon que 3 a 4, ò 6 a 8, como consta por lo demostrado en la prop. 39: luego por quanto la razon del cono BKC al cono FKI se compone (b) de la razon de la altura PK a la altura AK [esto es de la razon de 9 à 6,] y de la razon de la base QT a la base ND [esto es de la razon de 6 a 8] tendrá (c) el cono BKC al cono FKI la razon que 9 a 8; pero la esphera CG (d) es quadrupla del cono FKI: luego el cono equilatero BKC a la esphera CG tendrá la misma razon que 9 a 32, que es lo que, &c.

(b) Schol. 15 P. 12.
(c) 5. def. 6.
(d) 30. P. d.

PROPOSICION 43.

El cono equilatero circumscripto a la esphera es octuplo del cono equilatero inscripto en la misma esphera.

Del cono equilatero SKT inscripto en la esphera, y del circumscripto DOF sea el exe comun OKB, y cortense por el exe comun, assi los dos conos como la esphera serán las secciones dos triangulos equilateros, y el circulo maximo BPM; y al triangulo DOF imaginese circumscripto el circulo NDOF, y alargado el exe KOB hasta el punto N. Por quanto el lado DF del triangulo equilatero corta la NB (a) la quarta parte del exe ON, será NO dupla de la BK. Assimismo porque el lado ST del triangulo equilatero (a) corta la BC la

Fig 33.

(a) 5. Corol. 15. P. 4.

quarta parte del exe *BK*: luego NO a la *BO* es como la *BK* a la *CK*, y alternando será NO a la *BK* como BO a la *CK*; pero NO es dupla de la BK: luego la BO tambien es dupla de la CK: y porque los triangulos DOF, *SKT* son semejantes,
(b) 4.P.6. tambien (b) la DF será dupla de la ST, que son los diametros de las bases conicas; y porque los conos
(c) 12.P.12 DOF, *SKT* son semejantes, tendrán (c) triplicada la razon de los diametros DF, *ST*, que es de 2 a 1: luego el cono DOF al cono *SKT* tiene la razon que 8 a 1, que es lo que se avia, &c.

PROPOSICION 44.

La esphera tiene al cono equilatero circumscripto a ella la razon que 4 a 9; assi quanto a la solidez como quanto a la superficie.

Fig. 33. Porque la esphera TP al cono equilatero SKT
(d) 42.P.d. inscripto en ella tiene [d] la razon que 32 a 9, y el cono equilatero SKT inscripto tiene al cono
(e) 43.P.d. equilatero circumscripto *DOF* [e] la razon que 1 a 8, ò 9 a 72: luego por la igualdad de razon, la esphera TP tiene al cono equilatero circumscripto *DOF* la razon que 32 a 72, ò 4 a 9; pero en la proposicion 40. está tambien demostrado, que la superficie espherica à la total superficie del cono equilatero circumscripto tiene la razon que 4 a 9: luego la esphera tiene al cono equilatero, &c. que es lo que, &c.

PRO-

PROPOSICION 45.

El cono equilatero circumſcripto a la eſphera, y el cilindro recto circumſcripto a la miſma, y la miſma eſphera eſtàn en continua proporcion, la qual es ſeſquialtera, aſsi en la ſolidez como en la ſuperficie.

Porque el cilindro recto circumſcripto a la eſphera tiene la razon [a] a ella como 3 a 2, aſſi en la ſolidez, como en la ſuperficie, ò como 6 a 4; pero (b) el cono equilatero circumſcripto a la eſphera tiene la razon a ella, como 9 a 4: luego el miſmo cono al cilindro tiene la razon que 9 a 6, aſſi en la ſolidez, como en la ſuperficie: luego los tres ſolidos el cono, el cilindro, y la eſphera tienen la razon que los numeros 9, 6, 4, que es continua ſeſquialtera, que es lo que ſe avia de demoſtrar.

(a) 32. P. d.
(b) 44. P. d.

Fin de los Theoremas ſelectos de Archimedes.



